This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

600035956Y

PRESS.
SHELF.
No.

18753 e. 93/1-3

600036966Y

PRESS.
SHELF.
Nº

C

18753 e. 93/1-3

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 0000-76.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉES A LA SORBONNE DE 1853 A 1875

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE, DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1846 A 1875,

ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences
et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION

PREMIÈRE PARTIE

ARITHMÉTIQUE, ALGEBRE, TRIGONOMÉTRIE

QUESTIONS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1876

(Tous droits réservés.

RECUEIL

DE PROBLÈMES

QUESTIONS

ARITHMÉTIQUE.

1° APPROXIMATIONS, MULTIPLICATION ABRÉGÉE, DIVISION ABRÉGÉE.

1. Avec quelle approximation peut-on calculer le quotient de deux nombres qui sont donnés chacun avec un certain degré d'approximation? — Faire connaître la méthode abrégée qu'il faut employer pour calculer le quotient.

Exemple : Les deux nombres 3,1415926 et 9,80896 sont l'un et l'autre affectés d'une erreur qui peut aller jusqu'à une unité de l'ordre du dernier chiffre conservé en plus ou en moins. On calculera le quotient de ces deux nombres, en se bornant au chiffre sur l'exactitude duquel on peut compter. (Sorbonne, 1858.)

2. Avec quelle approximation peut-on calculer le produit de deux nombres qui sont donnés chacun avec un certain degré d'approximation? — Faire connaître la méthode abrégée qu'il convient d'employer pour calculer le produit.

Exemple : Les deux nombres 4897,85 et 235,786 sont l'un et l'autre affectés d'une erreur qui peut aller jusqu'à 2 unités de

l'ordre du dernier chiffre conservé en plus ou en moins. On calculera le produit de ces deux nombres, en se bornant au chiffre sur l'exactitude duquel on peut compter. (Sorbonne, 1860.)

2° PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT MULTIPLE.

3. Étant donnés les trois nombres 1800, 1440, 2520, déterminer : 1° leur plus grand commun diviseur ; 2° leur plus petit multiple; 3° combien ces nombres admettent-ils de diviseurs communs? (Sorbonne, 1872.)

3° RACINES CARRÉES

4. Calculer $\sqrt{\frac{5}{7}}$ à 0,001 près. (Sorbonne, 1863.)

5. Le rapport de la circonférence au diamètre étant représenté par π, on demande d'extraire à 0,01 près la racine carrée du nombre $\frac{2\pi + 19}{8 - \pi}$. (Sorbonne, 1867.)

6. Extraire à 0,001 près $\sqrt{\frac{\sqrt{355} + \sqrt{113}}{\sqrt{355} - \sqrt{113}}}$. (Sorbonne, 1868.)

4° GRANDEURS PROPORTIONNELLES.

7. Les bénéfices de l'exploitation d'une mine de houille se partagent également tous les ans entre 20 actions de deux frères auxquels cette mine appartient. L'aîné avait 11 de ces actions, le cadet les 9 autres. Le premier a laissé 16 enfants, le second 13. Deux parts d'héritage sont en vente, une dans chaque succession : elles sont offertes au même prix. On demande quelle est

celle des deux parts dont l'acquisition serait la plus avantageuse. (Sorbonne, 1854.)

8. Comment divise-t-on une droite de 26^{m} en trois parties proportionnelles aux nombres 2, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$? (Sorbonne, 1858.)

9. Partager une longueur de 257 mètres en trois parties dont les carrés soient proportionnels aux nombres 3, 5, 7. On évaluera chacune des trois parties demandées à un millimètre près. (Sorbonne, 1858.)

10. On mélange 40 litres de vin à 0 fr. 60 c. le litre avec 65 litres de vin à 1 fr. 30 c.; on demande à quel prix reviendra le litre de mélange. (Sorbonne, 1859.)

11. Partager le nombre 12 en deux parties telles, que la plus grande partie soit moyenne proportionnelle entre le nombre 12 tout entier et la plus petite partie. On calculera chaque partie à 0,001 près. (Sorbonne, 1860.)

12. 50 ouvriers travaillant cinq heures et demie par jour, pendant 18 jours, ont élevé un mur dont les dimensions sont : hauteur, 3 mètres; longueur, 125 mètres; épaisseur, 0^{m},50; combien faudra-t-il de jours à 33 ouvriers, travaillant 10 heures par jour, pour élever un mur de : hauteur, 4 mètres; longueur, 210 mètres; épaisseur, 0^{m},75 ? (Sorbonne, 1860.)

13. Partager le nombre 327 en trois parties proportionnelles aux nombres $\frac{2}{3}$, 6 et $\frac{1}{8}$. (Sorbonne, 1865.)

14. Partager 1 en 2 parties proportionnelles à $\sqrt{3}$ et à $\sqrt{2}$. Calculer la plus grande partie à 0,001 près. (Sorbonne, 1868.)

5e INTÉRÊTS SIMPLES ET ESCOMPTES.

15. Un capital de 3227 fr. 50 c. a produit 147 fr. 25 c. d'intérêt au bout de 9 mois et 10 jours; quel a été le taux de l'intérêt, c'est-à-dire combien 100 fr. produiront-ils pendant un an ? (Sorbonne, 1860.)

16. Quel est le capital qui, placé à 5 $\frac{1}{2}$ pour 100 par an pendant 8 mois et 10 jours, produira 238 fr. d'intérêts? (Sorbonne, 1860.)

17. Une personne qui doit 5000 fr. remet à son créancier un billet de 4200 fr., payable dans 4 mois; le taux de l'escompte commercial étant supposé de 6 pour 100, combien cette personne doit-elle ajouter d'argent comptant pour acquitter sa dette? (Sorbonne, 1860.)

18. Quel est le capital qui, placé à 5 $\frac{1}{2}$ pour 100 par an pendant 8 mois et 10 jours, produira 238 fr. d'intérêt ? (Sorbonne, 1865.)

19. On a deux payements à effectuer : l'un de 15000 fr. au bout de 4 ans et 6 mois, et l'autre de 27000 fr. au bout de 7 ans et 8 mois ; on voudrait s'acquitter en une fois, au moyen d'un payement de 42000 fr. ; on demande à quelle époque il devra s'effectuer. L'intérêt simple est au taux de 5 pour 100. (Sorbonne, 1869.)

20. A quel taux était placé un capital de 3227 fr. 50 c. qui a produit un intérêt de 147 fr. 25 c. en 9 mois et 10 jours? (Sorbonne, 1873.)

21. Des obligations au porteur, de 1000 fr. chacune, rapportent 50 fr. par an; on prend ces obligations à 1015 fr. A quel taux l'argent est-il ainsi placé ? (Sorbonne, 1874.)

22. Une personne emprunte 1000 fr. ; elle doit rendre 300 fr. dans 6 mois, 300 fr. dans 8 mois, 300 fr. dans 10 mois et 100 fr. dans 1 an. Quelle somme le prêteur devra-t-il remettre à la personne s'il prélève d'avance les intérêts, eu égard aux remboursements successifs? Le taux est 5 pour 100. (Sorbonne, 1875.)

6° ALLIAGES.

23. Deux alliages d'argent et de cuivre sont au titre de 0,810 et 0,785. Quel poids de chacun de ces alliages faudra-t-il prendre pour obtenir un alliage du poids de 15 grammes, au titre de 0,790? (Sorbonne, 1875.)

7° PROBLÈMES DIVERS.

24. On laisse tomber une pierre dans un puits profond et on entend le bruit de sa chute au bout de n secondes; calculer la profondeur du puits, connaissant l'accélération g de la chute des corps pesants et la vitesse a du son dans l'air. (Sorbonne, 1875.)

18

L.

ALGÈBRE.

1° DIVISION DES POLYNOMES.

1. Exposer la règle de la division des polynômes ; on prendra pour exemple la division de

$$10a^5b - 21a^4b^2 - 10a^3b^3 - 3a^2b^4 - 56ab^5$$

par

$$5a^2b - 3ab^2 + 8b^3.$$

(Sorbonne, 1859.)

2. Soit le quadrinôme $x^3 + px^2 + qx + r$; on suppose qu'en y substituant a à la place de x ce quadrinôme devienne 0; de là il suit que ce quadrinôme est divisible par $x - a$: c'est ce qu'on propose de démontrer. Par suite, il sera facile de décomposer le quadrinôme en trois facteurs où x n'entre qu'au premier degré : c'est aussi ce qu'il faut démontrer. (Sorbonne, 1859.)

3. Effectuer la division du binôme $32x^5 + 243$ par le binôme $2x + 3$. (Sorbonne, 1860.)

4. Dans quel cas $x^m + a^m$ est-il divisible par $x + a$? (Sorbonne, 1869.)

2° ÉQUATIONS DU 1er ET DU 2e DEGRÉ.

5. Résoudre le système d'équations

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 8 \quad \text{et} \quad \frac{x}{9} - \frac{y}{10} = 1.$$

(Sorbonne, 1869.)

6. Résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 17, \\ 3x + 2y - z &= 12, \\ 5x + 3y - 2z &= 18. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1859.)

7. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2z &= 19, \\ 4x + 5y - 3z &= 31, \\ 3x + 7y - 4z &= 31. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1860.)

8. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} 23x - 35y + 52z &= 118, \\ 24x + 75y - 42z &= 53, \\ -51x + 67y + 32z &= 183. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1860.)

9. On propose de résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} 2x - 3y - z &= 1, \\ 3x + 2y - 2z &= 13, \\ 5x - 4y - 2z &= 11. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1860.)

10. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} 5x + 3y - 2z &= 23, \\ 3x - y + 4z &= 55, \\ 2x + 7y + 5z &= 73. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1874.)

11. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} 3z + 2u - 5y &= 18, \\ 3x + y - 4u &= 9, \\ x + 7z - 6y &= 33, \\ 5z - 2x - 8y + 2u &= 15. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1860.)

12. Résoudre le système des trois équations

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=38,$$

$$\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76,$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{147}{5}.$$

(Sorbonne, 1860.)

13. Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \\ mx+ny+pz=d. \end{cases}$$

(Sorbonne, 1875.)

14. Résoudre le système

$$x+y=\frac{21}{8},$$

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{25}{6}.$$

(Sorbonne, 1854.)

15. Résoudre le système

$$\begin{aligned} x+y+z&=a, \\ y+z+u&=b, \\ z+u+x&=c, \\ u+x+y&=d. \end{aligned}$$

(Sorbonne, 1874.)

16. Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \\ x+y+z=d. \end{cases}$$

(Sorbonne, 1874.)

17. Résoudre les deux équations

$$xy^2 = 18,$$
$$x + y^2 = 11.$$

(Sorbonne, 1859.)

18. Résoudre les deux équations suivantes :

$$5y^2 + 3x^2 = 30752,$$
$$9y - 5x = 424,$$

(Sorbonne, 1858.)

19. Résoudre les équations

$$2x^2 + 3y^2 = 37,$$
$$3xy = 5.$$

On calculera les valeurs des inconnues à 0,001 près. (Sorbonne, 1873.)

20. Résoudre l'équation

$$x - 5 = \sqrt{x} + 1.$$

(Sorbonne, 1859.)

21. Résoudre les deux équations

$$\frac{5x-2}{4-3y} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3x+5}{y-1} = \frac{2}{3}.$$

(Sorbonne, 1859.)

22. Résoudre les deux équations

$$3x^2 - 2y^2 = 19,$$
$$2x^2 + 5y^2 = 38.$$

(Sorbonne, 1859.)

23. On propose de résoudre les deux équations

$$x^2 - y^2 = 3,$$
$$x^2 + y^2 - xy = 3.$$

(Sorbonne, 1859.)

24. Résoudre l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}+\frac{x}{b}.$$

(Sorbonne, 1859.)

25. Résoudre l'équation

$$\frac{x-a}{2a}=\frac{2b}{2x+a}.$$

(Sorbonne, 1859.)

26. On donne les deux équations

$$x-y^2=2,297,$$
$$xy=3,247,$$

et l'on demande de calculer à 0,001 près les valeurs des inconnues x et y. (Sorbonne, 1859.)

27. Résoudre l'équation

$$\frac{7x+10}{x-2}=\frac{5x}{12}+\frac{35}{6}.$$

(Sorbonne, 1859.)

28. Résoudre les deux équations

$$3x^2+2y^2=813,$$
$$7x-4y=17.$$

(Sorbonne, 1867.)

29. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5.$$

(Sorbonne, 1875.)

30. Résoudre le système d'équations

$$2x+3y=16 \quad \text{et} \quad 3x^2+2y^2=67.$$

(Sorbonne, 1872.)

31. Résoudre l'équation générale du second degré

$$x^2-px+q=0.$$

Indiquer les conditions nécessaires pour que les racines soient réelles.

Appliquer les formules à l'équation particulière

$$x^2 - 879x + 85137 = 0.$$

(Sorbonne, 1860.)

32. Résoudre les équations

$$(1) \qquad x - y = 1{,}023,$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 13{,}196.$$

(Sorbonne, 1875.)

33. Partager le nombre 27 en deux parties telles, que la somme de quatre fois le carré de la première et de cinq fois le carré de la seconde soit égale à 1620. (Sorbonne, 1868.)

34. La différence de deux nombres est 17, la différence de leurs cubes est 29393; quels sont ces deux nombres? (Sorbonne, 1861.)

35. Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, sachant que ce sont trois nombres consécutifs. (Sorbonne, 1864.)

36. Calculer à 0,01 près deux nombres dont le produit est 2759 et dont les carrés ont pour différence 1297. (Sorbonne, 1860.)

37. Trouver deux nombres, sachant que leur somme est 28 et que la somme de leurs cubes est 6244. (Sorbonne, 1859.)

38. La somme de deux nombres est 16, la différence de leurs carrés est 32; quels sont ces deux nombres? (Sorbonne, 1860.)

39. Calculer à 1 centimètre près les côtés d'un triangle rectangle dont la surface vaut 6382 mètres carrés et le périmètre $458^m,36$. (Sorbonne, 1863.)

40. Un nombre est composé de trois chiffres dont la somme est 11; le chiffre des centaines est double de celui des dizaines; si du nombre on retranche 396, on trouve le nombre renversé; trouver ce nombre. (Sorbonne, 1873.)

41. Partager 590 en deux parties dont le produit soit égal à 80464. (Sorbonne, 1859.)

42. La somme de deux nombres est 23, la somme de leurs carrés est 277; quels sont ces nombres? (Sorbonne, 1858.)

43. On donne deux vases, l'un plein d'eau, l'autre plein de vin; on propose de déterminer la capacité d'un troisième vase tel, qu'en puisant dans les deux vases donnés et échangeant les liquides les mélanges soient semblables. (Sorbonne, 1874.)

44. Trouver deux nombres, sachant que leur somme est égale à 3017 et que la différence entre le quadruple du carré du premier nombre et le carré du second est égale à 52051. (Sorbonne, 1860.)

45. La surface d'un triangle rectangle est de $12^m,65$, la différence des carrés des côtés de l'angle droit est de $17^m,35$; calculer ces deux côtés à 0,001 près. (Sorbonne, 1866.)

46. Trouver deux nombres tels, que leur différence vaille 6 et leurs cubes 3582. (Sorbonne, 1866.)

47. Trouver deux nombres, sachant que leur différence égale 7,85 et la somme de leurs carrés 392 8853. (Sorbonne, 1864.)

48. On demande de trouver deux nombres dont le produit soit 17 et la somme 18. (Sorbonne, 1867.)

49. Partager 590 en deux parties dont le produit soit égal à 80464. (Sorbonne, 1875.)

50. Trouver la somme des carrés des racines d'une équation du deuxième degré $x^2 + px + q = 0$ sans résoudre l'équation. (Sorbonne, 1873.)

51. On donne dans un triangle rectangle : 1° l'hypoténuse, 2° la somme de la hauteur des deux côtés de l'angle droit; on demande de déterminer la hauteur et les deux côtés de l'angle droit. (Sorbonne, 1873.)

52. Trouver deux nombres, connaissant leur somme et celle de leurs racines carrées; application au cas où la somme des nombres est 25 et celle des racines carrées 7. (Sorbonne, 1873.)

53. On lance une pierre de bas en haut et elle vient choquer avec bruit un obstacle fixe placé en B sur la verticale; déterminer

la hauteur AB, sachant qu'il s'est écoulé un temps t entre le moment où un observateur placé en A a entendu le bruit du choc en B et celui où la pierre est venue retomber. (Sorbonne, 1873.)

54. Résoudre les deux équations

$$x - y = a \quad \text{et} \quad bx^2 - cy^2 = d,$$

a, b, c, d désignant des nombres connus. Cas particulier de $b = c$. (Sorbonne, 1874.)

55. Les lettres a, b désignant des nombres positifs donnés, résoudre les deux équations

$$x - y = a \quad \text{et} \quad x^3 - y^3 = b,$$

et dire dans quel cas il existera des valeurs réelles et positives des inconnues. (Sorbonne, 1874.)

3° ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

56. Trouver deux nombres x et y tels, que leur somme soit égale à 10 et celle de leur cube à 200. Calculer les deux nombres à 0,001 près. (Sorbonne, 1867.)

57. Partager une longueur de 1 mètre en deux parties dont les carrés soient dans le rapport de $\frac{3}{7}$. On indiquera une construction géométrique et l'on calculera en outre les deux parties demandées à 1 dixième de millimètre près. (Sorbonne, 1867.)

58. Partager le nombre 10 en deux parties telles, que la somme des cubes de ces deux parties soit égale à 370. (Sorbonne, 1867.)

59. Résoudre le système d'équations simultanées

$$x - y = 1 \quad \text{et} \quad x^3 - y^3 = 7.$$

(Sorbonne, 1868.)

60. Résoudre le système d'équations

$$x - y = 4 \quad \text{et} \quad x^3 - y^3 = 316.$$

(Sorbonne, 1869.)

61. Résoudre le système des deux équations suivantes :

$$x + y = 8 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 = 224.$$

(Sorbonne, 1872.)

4° DÉCOMPOSITION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ.

62. Décomposer en deux facteurs du premier degré en x le trinôme $9x^2 - 9x + 2$. (Sorbonne, 1869.)

63. Décomposer en deux facteurs du premier degré

$$4x^2 - 12x + 5.$$

(Sorbonne, 1868.)

64. Décomposer le trinôme $x^2 - px + q$ en facteurs du premier degré.

Donner les relations qui existent entre les coefficients et les racines de l'équation $x^2 - px + q = 0$. (Sorbonne, 1871.)

65. Expliquer comment on décompose un trinôme du second degré en deux facteurs du premier degré. On fera le raisonnement sur l'exemple $-2x^2 - 3x + 5$. (Sorbonne, 1871.)

66. Décomposer en facteurs du premier degré le polynôme $x^4 - 13x^2 + 16$. (Sorbonne, 1872.)

5° VARIATION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ.

67. Comment varie le trinôme $x^2 - 6x + 15$ quand on fait croître x de la quantité $-\infty$ à $+\infty$? (Sorbonne, 1869.)

68. x variant de $-\infty$ à $+\infty$, dire dans quels intervalles la fonction $\frac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - x - 2}$ sera positive et dans quels intervalles elle sera négative. (Sorbonne, 1870.)

6° PROPORTIONS ET PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE ET PAR QUOTIENT.

69. Combien faut-il prendre de termes dans une progression par différence, dont le premier terme est 2,5 et dont la raison est 0,3, pour que la somme de ces termes soit égale à 1020? (Sorbonne, 1858.)

70. Partager le nombre 195 en trois parties qui forment une progression géométrique et dont la troisième surpasse la première de 120. (Sorbonne, 1860.)

71. On propose d'insérer quatre moyens proportionnels entre 17,524 et 39,815. Chacun de ces moyens devra être calculé à 0,001 près. (Sorbonne, 1858.)

72. Insérer trois moyens géométriques entre 1 et 10 et trois moyens arithmétiques entre 0 et 1, avec une approximation de 0,01, sans le secours des logarithmes. (Sorbonne, 1859.)

73. Calculer les quatre termes d'une proportion par quotient, sachant : 1° que le premier terme surpasse le deuxième de 4 ; 2° que le troisième surpasse le quatrième de 3 ; 3° que la somme des carrés des quatre termes est égale à 62,5. (Sorbonne, 1860.)

74. Combien doit-on prendre de termes dans la progression arithmétique 5, 9, 13, 17 pour que leur somme soit égale à 10877? (Sorbonne, 1866.)

75. Démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2. (Sorbonne, 1867.)

76. Combien faut-il de termes dans la progression arithmétique 2, 5, 8, 11, etc., pour que leur somme soit égale à 876? (Sorbonne, 1868.)

77. Deux mobiles partent au même instant de deux points A et B et marchent sur la droite AB dans le même sens, A poursuivant B. Le premier parcourt 1 mètre dans la première minute, 3 mètres dans la deuxième, 5 mètres dans la troisième, et ainsi de suite, de sorte que l'espace parcouru dans chaque minute croît en progression arithmétique. Le second parcourt de même 3 mètres dans la première minute, 4 mètres dans la deuxième, 5 mètres dans la troisième, et ainsi de suite. On demande après combien de minutes le mobile A atteindra le mobile B, sachant que la distance AB est de 75 mètres. (Sorbonne, 1867.)

78. Combien faut-il prendre de termes dans la progression arithmétique $\frac{2}{3}$, 5, 8, 11,... pour que leur somme soit égale à 876? (Sorbonne, 1867.)

79. Calculer les côtés d'un triangle rectangle, sachant que ces côtés sont en progression arithmétique dont la raison est a. (Sorbonne, 1869.)

80. Insérer cinq moyens géométriques entre les deux nombres 1 et 4826809. (Sorbonne, 1870.)

81. Trouver la limite de la somme des termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

(Sorbonne, 1872.)

82. Somme des n premiers termes de la progression

$$\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\cdots.$$

(Sorbonne, 1872.)

83. On demande de trouver les différents termes d'une progression arithmétique, sachant que la somme des n termes, à partir du premier, est égale à n + une fois la moitié du terme auquel on s'arrête. (Sorbonne, 1873.)

84. Expliquer comment on trouve la somme des termes d'une progression géométrique. Examiner le cas où la progression géométrique est décroissante et se prolonge à l'infini. Application à la progression géométrique dont le premier terme serait 0,72, la raison 0,01 et le nombre des termes infini. (Sorbonne, 1874.)

7° INTÉRÊTS COMPOSÉS ET ANNUITÉS.

85. Une personne place chaque année une somme s pendant n années, à la condition que la banque lui payera une annuité a pendant les $2n$ années qui suivront les n suivantes. Trouver la valeur de l'annuité, pour que le marché soit équitable, lorsqu'on tient compte des intérêts composés. Quel doit être le nombre d'années n pour que l'annuité soit au moins égale à la somme placée chaque année? (Sorbonne, 1851.)

86. Une personne emprunte 1000 francs, qu'elle s'engage à rembourser en quatre payements successifs faits à deux mois d'intervalle les uns des autres à partir du sixième mois qui suivra l'emprunt. Les trois premiers payements seront de 300 francs chacun et le quatrième sera de 100 francs. En supposant que le prêteur prélève d'avance l'intérêt de la somme prêtée, eu égard aux remboursements successifs, quelle somme remettra-t-il à son débiteur? Le taux de l'intérêt est supposé à 5 $\frac{1}{2}$ pour 100. (Sorbonne, 1858.)

87. On doit payer chaque année une somme de 2000 francs pendant 12 ans. On demande de remplacer cette annuité par un seul payement effectué dans 4 ans. Quelle sera la somme à payer, en supposant que le taux de l'intérêt soit à 5 pour 100? (Sorbonne, 1859.)

88. Calculer ce que produirait en 8 ans un capital de 3625 francs placé à intérêts composés au taux de 4 pour 100. Sorbonne, 1859.)

89. Une somme de 3682 fr. 48 c., placée à intérêts composés pendant 8 ans, a augmenté de 1546 fr. 73 c. On demande quel était le taux de l'intérêt. (Sorbonne, 1859.)

90. Établir la formule des intérêts composés; déterminer à l'aide de cette formule le nombre d'années pendant lequel un capital de 7872 francs doit être placé, à intérêts composés, à raison de 5 pour 100 par an, pour former une somme de 12328 francs, capital et intérêts réunis. (Sorbonne, 1859.)

91. On doit recevoir pendant 6 ans, à la fin de chaque année, la somme de 325 francs. Par quelle somme actuelle peut être remplacée cette annuité? L'intérêt de l'argent est à 5 pour 100. (Sorbonne, 1867.)

92. On emprunte une somme A à 5 pour 100, à intérêts composés; quelle annuité faudra-t-il payer pour que, après 5 annuités, la dette soit réduite à $\frac{A}{2}$? (Sorbonne, 1873.)

93. Une personne qui s'est engagée à payer 10 sommes égales à a, la première dans un an et les suivantes d'année en année, propose de s'acquitter en payant 5 sommes égales à x, la première dans un an et les autres d'année en année. Quelle doit être la somme x? On aura égard aux intérêts composés, dont on supposera le taux annuel égal à i pour 100. (Sorbonne, 1874.)

8° CALCULS PAR LOGARITHMES.

94. Calculer à l'aide des logarithmes et sous forme de fraction décimale la racine quatrième de la fraction $\frac{128}{9657}$. (Sorbonne, 1859.)

95. Calculer à l'aide des tables de logarithmes et sous forme de fraction décimale la racine cubique de la fraction $\frac{23}{72586}$. (Sorbonne, 1859.)

96. On propose de calculer par logarithmes l'inconnue x donnée par la formule suivante :

$$x = \frac{31,071 \times 21,372 \times 7,259}{0,515 \times 0,719 \times 0,021}.$$

(Sorbonne, 1859.)

97. Calculer à l'aide des tables de logarithmes et sous forme de fraction décimale $\sqrt{\frac{23}{72586}} = x$. (Sorbonne, 1874.)

98. Calculer la base du système de logarithmes dans lequel 3 a 1000 pour logarithmes. (Sorbonne, 1875.)

99. Calculer la base du système de logarithmes dans lequel 9 a pour base 10. (Sorbonne, 1870.)

TRIGONOMÉTRIE.

1° ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION.

1. Le sinus d'un angle étant $\frac{1}{4}$, on demande les valeurs du sinus et du cosinus de la moitié de cet angle (Sorbonne, 1860.)

2. On donne deux angles P et Q; on demande de calculer un angle X qui soit compris entre 0° et 90°, qui satisfasse à cette équation : $\sin X = \sin P + \sin Q$.

$$P = 28°19'37'',4, \quad Q = 16°47'3'',6.$$

(Sorbonne, 1860.)

3. Trouver entre 0° et 45° un angle tel, que la somme de son sinus et de son cosinus soit égale à 1,15. (Sorbonne, 1861.)

4. Étant donné $\sin 30° = \frac{1}{2}$, calculer $\sin 15$ et $\cos 15$. (Sorbonne, 1868.)

5. La tangente de la moitié d'un angle a une valeur donnée $m = \sqrt{2} - 1$; calculer la tangente de cet angle. (Sorbonne, 1868.)

6. La tangente de la moitié d'un angle a une valeur donnée n; calculer le sinus, le cosinus et la tangente de cet angle. On appliquera les formules trouvées au cas particulier où n serait égal à $\sqrt{2} - 1$. (Sorbonne, 1869.)

7. Calculer $\tang \frac{a}{2}$ en fonction de $\tang a$.

Application au calcul de $\tang 22°30'$. (Sorbonne, 1869.)

8. Calculer $\operatorname{cosec} 2a$, sachant que $\cot a = \frac{4}{3}$. (Sorbonne, 1870.)

9. Étant donné $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, calculer $\sin 15^\circ$. (Sorbonne, 1870.)

10. Étant donné $\operatorname{tang} 45^\circ = 1$, calculer $\operatorname{tang} 22^\circ 30'$. (Sorbonne, 1870.)

11. Sachant que la tangente d'un angle est égale à $\frac{4}{3}$, trouver le sinus, le cosinus et la tangente du double de cet angle. (Sorbonne, 1873.)

12. Étant donnée $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a$, trouver la valeur de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tang} a$; examiner si les formules doivent donner une ou plusieurs valeurs pour chacune des inconnues. (Sorbonne, 1875.)

13. Calculer le sinus et le cosinus de l'arc 15°. (Sorbonne, 1874.)

2° FORMULES DE RELATION.

14. L'arc de 75° peut se partager en deux arcs, dont on peut trouver facilement les sinus et les cosinus au moyen de la géométrie. On propose de trouver ces quatre lignes et de s'en servir ensuite pour calculer le sinus, le cosinus et la tangente de 75°. (Sorbonne, 1858.)

15. La cotangente d'un angle étant égale à 1, trouver son sinus. (Sorbonne, 1859.)

16. Étant donné un arc $a = 17^\circ 35' 14'',2$, calculer un autre arc x tel qu'on ait $\sin x = 2 \sin a$. (Sorbonne, 1859.)

17. Le cosinus d'un angle compris entre 90° et 180° étant égal à $-0,358$, on demande de calculer à 0,001 près, et sans faire usage des logarithmes, le cosinus de la moitié de cet angle. On vérifiera le résultat à l'aide des tables trigonométriques. (Sorbonne, 1859.)

18. Établir les formules qui servent à calculer $\sin \frac{1}{2} a$ et $\cos \frac{1}{2} a$, lorsqu'on connaît $\cos a$; appliquer ces formules au cas où l'on aurait $\cos a = 0,85742$. (Sorbonne, 1859.)

19. Démontrer l'équation

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b = \frac{2 \sin(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)}.$$

(Sorbonne, 1859.)

20. Quels sont les angles compris entre 0° et 1000° qui ont pour cosinus + 0,548? (Sorbonne, 1859.)

21. On sait que le sinus d'un arc compris entre 90° et 180° a pour valeur 0,75825; on demande de calculer le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante de cet arc. On aura soin de faire connaître le signe dont chacune de ces quantités doit être affectée. On fera les calculs à 0,001 près. (Sorbonne, 1859.)

22. Calculer le plus petit des arcs x qui satisfait à l'équation $\cos(x+30) - \cos(x+45) = \sin 15$. (Sorbonne, 1865.)

23. Étant donné $\operatorname{tang}\frac{a}{2} = 2 - \sqrt{3}$, trouver $\sin a$. (Sorbonne, 1868.)

24. Un mât vertical BC est fixé au sommet d'une tour AB; les rayons visuels dirigés aux deux extrémités du mât, d'un point o du plan horizontal, qui passe par le pied de la tour, font avec l'horizon des angles de 30° et de 60°; déterminer le rapport de la longueur BC du mât à la hauteur AB de la tour. (Sorbonne, 1869.)

25. Calculer $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tang} a$. Application au cas où l'angle a est un angle de 60°. (Sorbonne, 1869.)

26. La tangente de la moitié d'un angle a une valeur donnée $m = \sqrt{2} - 1$; calculer la tangente de cet angle. (Sorbonne, 1871.)

27. Vérifier la formule

$$\operatorname{tang}(45 + a) - \operatorname{tang}(45 - a) = 2 \operatorname{tang} 2a.$$

(Sorbonne, 1872.)

28. Trouver les valeurs de l'angle x satisfaisant à l'équation

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Sorbonne, 1873.)

29. La cotangente d'un angle étant égale à 1, trouver son sinus. (Sorbonne, 1873.)

3° TABLES.

30. Démontrer les formules qui servent à calculer le sinus, le cosinus et la tangente de la moitié d'un angle quand on connaît le cosinus de cet angle. S'en servir pour calculer à $\frac{1}{10000}$ près la tangente de 30°. (Sorbonne, 1859.)

31. Connaissant le nombre $\pi = 3,14159$, calculer approximativement le sinus de l'arc de 10° et dire sur combien de chiffres décimaux on peut compter. (Sorbonne, 1859.)

32. Calculer avec sept décimales les sinus des angles de 20°, 92°, 164°, 236° et 308°, et en conclure la somme algébrique de ces sinus. (Sorbonne, 1859.)

33. Expliquer l'emploi des tables trigonométriques de Callet pour le calcul d'un angle dont le sinus est donné. Calculer en particulier, à l'aide de ces tables, l'angle dont le sinus est égal à $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et dire sur quel degré d'approximation on peut compter. (Sorbonne, 1860.)

34. Calculer à 0",1 près l'arc dont la tangente est $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (Sorbonne, 1860.)

35. Calculer avec sept chiffres décimaux la valeur que prend l'expression

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x,$$

lorsqu'on suppose $x = 83°24'36''$. (Sorbonne, 1861.)

36. Expliquer pourquoi dans les tables trigonométriques la colonne des différences est commune pour les tangentes et les cotangentes. (Sorbonne, 1864.)

37. On donne $\pi = 3,14159$; calculer approximativement le sinus de l'arc 10° et indiquer l'approximation obtenue. (Sorbonne, 1864.)

38. Calculer en degrés, minutes et secondes, l'arc que soustend dans un cercle une corde égale au $\frac{1}{4}$ du diamètre. (Sorbonne, 1868.)

4° RENDRE CALCULABLE PAR LOGARITHMES.

39. Un arc inconnu x est donné par la formule

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b;$$

il s'agit de la transformer en une autre plus commode pour le calcul logarithmique. (Sorbonne, 1859.)

40. Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin A + \sin B + \sin C,$$

A, B, C étant les trois angles d'un triangle. (Sorbonne, 1869.)

41. Rendre calculables par logarithmes les racines de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0.$$

(Sorbonne, 1870.)

42. Rendre calculable par logarithmes $\cos 15° - \sin 15°$. (Sorbonne, 1871.)

5° ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

43. Démontrer l'équation

$$\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b.$$

(Sorbonne, 1866.)

44. Étant donnés les deux angles $A = 23^\circ 57' 19''$, $B = 21^\circ 16' 46''$, calculer à une seconde près un troisième angle x, tel que l'on ait $\sin x = \sin A + \sin B$. (Sorbonne, 1866.)

45. Trouver le sinus de l'angle aigu x qui satisfait à l'équation $\cos 2x = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(\cos x - \sin x)$. (Sorbonne, 1869.)

46. Trouver le sinus et le cosinus d'un angle aigu x qui satisfait à l'équation $\operatorname{tang} 2x = 3 \operatorname{tang} x$. (Sorbonne, 1873.)

47. La lettre a désignant un nombre positif, trouver le sinus et le cosinus d'un angle x qui vérifie l'équation

$$\cos 2x = a(\cos x - \sin x).$$

Le problème est-il toujours possible? (Sorbonne, 1869.)

48. Résoudre l'équation

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Sorbonne, 1870.)

49. Partager un arc de 30° en deux parties telles, que le sinus de la première partie soit trois fois plus grand que le sinus de la deuxième partie. (Sorbonne, 1872.)

50. Quel doit être l'angle d'un secteur circulaire AOC pour que le volume du secteur sphérique engendré par la rotation du secteur circulaire autour du diamètre AB soit le quart de la sphère de rayon OA? (Sorbonne, 1873.)

51. La lettre a désignant un angle donné et la lettre x un angle inconnu, quelles sont les formules qui donnent les valeurs de x qui vérifient l'équation $\sin(x - a) = \sin x - \sin a$? (Sorbonne, 1873.)

52. Quelles sont les valeurs du sinus de l'angle x qui vérifient l'équation $\operatorname{tang} 2x = 3 \operatorname{tang} x$? (Sorbonne, 1873.)

53. Expliquer comment on détermine l'angle x donné par l'équation $a \sin x + b \cos x = c$.

Application à l'exemple $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$. (Sorbonne, 1873.)

54. Résoudre l'équation $4\sin x + 3\cos x = 2$. (Sorbonne, 1874.)

55. Partager un arc de 45° en deux parties telles, que le sinus de la première soit égal au double du sinus de l'autre. (Sorbonne, 1874.)

56. A quelles conditions doivent satisfaire les nombres a et b pour qu'il existe des valeurs réelles de x vérifiant l'équation $a\sin x + b\cos x = 1$. (Sorbonne, 1874.)

57. Trouver pour quelle valeur de l'arc x entre 0° et 90° l'expression $\tang x + 3\cot x$ est minimum. (Sorbonne, 1874.)

58. Calculer le sinus de l'angle formé par deux des diagonales d'un cube. (Sorbonne, 1875.)

59. Calculer le sinus de l'angle d'une arête d'un tétraèdre régulier avec l'une des faces ne comprenant pas cette arête. (Sorbonne, 1874.)

6° APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

60. Quel doit être le rayon d'un cercle pour que la différence entre un arc de 75 mètres et sa corde soit moindre que $0^m,001$? (Sorbonne, 1861.)

61. Une sphère est introduite dans un cône renversé dont l'angle ASB $= 2\alpha$; calculer le rapport du volume compris entre la surface inférieure de la sphère et le sommet du cône au volume de la sphère entière. Après avoir établi la valeur générale du rapport, on y fera $\alpha = 60°$ et l'on donnera les deux premières décimales du résultat. (Sorbonne, 1864.)

62. Calculer à 1 mètre près la longueur d'un arc MN de parallèle terrestre dont la latitude est 48°50′ et la différence de longitude de ses extrémités 3°36′, la circonférence terrestre étant de 4000 kilomètres. (Sorbonne, 1864.)

63. Dans un cercle de rayon 1, calculer à $0^{mq},01$ près la sur-

face comprise entre une corde distante de $0^m,70$ du centre et le diamètre parallèle. (Sorbonne, 1863.)

64. Calculer la zone comprise entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est 45°, la circonférence de la Terre valant 40000 kilomètres. (Sorbonne, 1865.)

65. Calculer en fonctions de a et b et de l'angle compris C le côté c du triangle ABC et rendre la formule calculable par logarithmes. (Sorbonne, 1875.)

66. Trouver les longueurs des bissectrices d'un triangle, quand on donne les trois côtés. (Sorbonne, 1875.)

67. Un parallélépipède rectangle de hauteur h a pour base un carré dont le côté est a; calculer la tangente de l'angle que forment entre elles les deux diagonales du parallélépipède. (Sorbonne, 1875.)

68. Le rayon d'un cercle étant de 1 mètre, on demande de calculer à 1 centimètre carré près l'aire x comprise entre les deux tangentes qui font un arc de 40° et l'arc de cercle qui se termine au point de contact. (Sorbonne, 1864.)

69. Calculer tous les angles susceptibles de satisfaire à l'équation $2,5 \sin x + 2,7182 \cos x = 3,1416$. (Sorbonne, 1864.)

70. Calculer le volume d'un secteur sphérique engendré par la révolution du secteur OAB tournant autour de OA, sachant que l'angle $\alpha = 54°28'$ et que le rayon $R = 0^m,2$. (Sorbonne, 1864.)

71. Partager un arc de 45 degrés en deux parties telles, que le sinus de la première soit égal au double du sinus de l'autre. (Sorbonne, 1875.)

72. Dans un triangle ABC, on donne $AB = 293^m,917$, $AC = 201^m,315$, l'angle $CAB = 23°27'32''$; calculer la longueur MP perpendiculaire à AB, partageant le triangle ABC en deux parties équivalentes. (Sorbonne, 1864.)

73. Partager un arc de 30° en deux parties telles, que le sinus de la première soit le triple du sinus de la seconde. (Sorbonne, 1864.)

74. Calculer l'angle au centre d'un secteur circulaire OAB, sachant que le volume du secteur sphérique engendré par la révolution de ce circulaire autour du rayon OA est le $\frac{1}{5}$ du volume entier de la sphère. (Sorbonne, 1865.)

75. Le rayon d'un cercle $= 2548^m,365$, la longueur d'une corde $AB = 3609^m,019$; calculer à 0,001 de seconde près l'angle ASB formé par les deux tangentes aux extrémités de A et de B. (Sorbonne, 1865.)

76. Calculer à une seconde près les angles d'un losange dont le périmètre $= 861^m,36$ et dont la surface $= 32548$ mètres carrés. (Sorbonne, 1865.)

77. Calculer à $\frac{1}{10}$ de seconde près les angles d'un losange, sachant que son périmètre vaut $812^m,693$ et que l'une de ses diagonales vaut $92^m,357$. (Sorbonne, 1865.)

78. Calculer en hectares la surface d'un segment compris entre un arc de 60° et sa corde dans un cercle de 572 mètres de rayon. (Sorbonne, 1865.)

79. Partager un arc de 30° en deux parties telles, que le sinus de la première soit le triple du sinus de la seconde. (Sorbonne, 1865.)

80. Calculer le nombre de degrés, minutes et secondes contenus dans un arc de cercle, sachant que la corde qui le soustend est égale au $\frac{2}{3}$ du diamètre. (Sorbonne, 1866.)

81. Calculer un angle x tel, que l'on ait $2 \sin x = \sin(45° - x)$. (Sorbonne, 1867.)

82. Calculer le volume du solide décrit par le secteur circulaire AOB tournant autour de AO. On supposera que l'angle AOB est de 55° et que le rayon $AO = R$ est de $7^m,34$. (Sorbonne, 1867.)

83. On donne un tronc de pyramide triangulaire dont les bases sont des triangles isoscèles; l'angle au sommet de ces triangles est de 45°; les côtés égaux valent : dans le grand, 1 mètre; dans le petit, $\frac{1}{3}$ de mètre. La hauteur du tronc est de 6 mètres. On demande le volume de la pyramide triangulaire formée par la petite base et le prolongement des faces latérales. (Sorbonne, 1865.)

84. Calculer la surface d'un segment de cercle compris entre un arc et sa corde, sachant que le rayon du cercle est de $689^m,75$ et que l'arc du segment correspond à un angle au centre de $141°27'38''$. On exprimera la surface en hectares, ares et centiares. (Sorbonne, 1866.)

85. Calculer l'arc dont le sinus est égal à la quinzième partie du sinus de l'arc de 15°. (Sorbonne, 1865.)

86. Calculer le volume du solide décrit par un triangle équilatéral ABC qui tourne autour d'une droite xy menée dans son plan par le sommet A, de manière à faire un angle de 18°. On supposera le côté du triangle égal à $7^m,35$. (Sorbonne, 1867.)

87. La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse la partage en deux segments dont les longueurs sont $3^m,643$, $4^m,928$. On propose de calculer les angles de ce triangle. (Sorbonne, 1865.)

88. Calculer l'angle x inférieur à 360, tel que

$$\sin x + \cos x = 1,12378.$$

(Sorbonne, 1867.)

89. Calculer tous les angles x qui satisfont à l'équation suivante :

$$\cos x + \cos(x + 30°) = \frac{3}{2}.$$

(Sorbonne, 1867.)

90. Calculer les angles x qui satisfont à l'équation

$$\cos x + \cos\frac{x}{2} = 1,999.$$

(Sorbonne, 1867.)

91. Partager l'angle 45° en deux parties dont les tangentes soient entre elles $= \frac{5}{6}$. (Sorbonne, 1866.)

92. Calculer à $\frac{1}{10}$ de seconde près l'angle que doivent faire deux rayons d'un cercle pour que la surface du triangle formé par les deux rayons et par la corde qui joint leurs extrémités soit le $\frac{1}{12}$ de la surface du cercle. (Sorbonne, 1866.)

93. Un parallélogramme dans lequel un angle est égal à φ est circonscrit à un cercle de rayon α. Evaluer la surface de ce parallélogramme. Quel doit être l'angle φ dans le cas où la surface est minimum? (Sorbonne, 1867.)

94. Trouver les angles x qui satisfont à l'équation

$$357915 \cos x + 193878 \sin x = 222336.$$

(Sorbonne, 1866.)

95. Déterminer x de manière que $\cos x + \sin x$ soit un maximum. (Sorbonne, 1868.)

96. Dans un quadrilatère ABCD on a

$$\begin{aligned} \cot AD &= 223^m,215, \\ CD &= 143^m,319, \\ BC &= 72^m,417, \\ \text{angle } D &= 120^\circ 10' 55'', \\ C &= 135^\circ 14' 17''. \end{aligned}$$

On demande de calculer AB. (Sorbonne, 1868.)

97. Calculer à $0'',1''$ de seconde près tous les arcs positifs et moindres que la circonférence qui satisfont à l'équation

$$\cos 2x = \cos x + 1.$$

(Sorbonne, 1867.)

98. L'arc de 75° peut se partager en deux arcs dont on peut trouver facilement les sinus et les cosinus au moyen de la géométrie. On propose de trouver ces quatre lignes et de s'en servir ensuite pour calculer le sinus, le cosinus et la tangente de 75°. (Sorbonne, 1868.)

99. Calculer le nombre de degrés, minutes et secondes contenus dans un arc de cercle, sachant que la corde qui le soustend est égale au $\frac{2}{3}$ du diamètre. (Sorbonne, 1868.)

100. Sachant que les deux tangentes menées d'un point à un cercle comprennent un angle d'une minute, trouver combien de fois la distance de ce point au centre du cercle est plus grande que le rayon. (Sorbonne, 1869.)

101. La Terre étant regardée comme sphérique, calculer avec six chiffres décimaux le rapport de la surface de la zone torride à la surface entière de la Terre. On admettra que les deux tropiques qui limitent cette zone sont à 23°27′32″ de l'équateur. (Sorbonne, 1868.)

102. L'angle a étant égal à 24°35′47″, calculer d'une part la quantité

$$x = \operatorname{tang} a + \operatorname{séc} a,$$

et d'autre part

$$y = \operatorname{tang}\left(\frac{a}{2} + 45^\circ\right).$$

(Sorbonne, 1869.)

103. Partager un arc de 45° en deux arcs dont les tangentes des deux parties soient dans le rapport de 2 à 3. On calculera chacune des deux parties à $\frac{1}{10}$ de seconde près. (Sorbonne, 1868.)

104. Deux circonférences de rayon a et b se touchent extérieurement; on mène les tangentes communes à ces deux circonférences autres que la tangente commune au point de contact. Calculer le sinus de l'angle de ces deux tangentes. (Sorbonne, 1873.)

7° RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

105. On donne les trois côtés du triangle ABC :

$$AB = 143^m,25,$$
$$AC = 208^m,33,$$
$$BC = 315^m,48.$$

On demande de calculer à 1 centimètre près la longueur de la perpendiculaire AD, abaissée du sommet A sur le côté opposé BC. (Sorbonne, 1854.)

106. La corde AB, dans le cercle O, est égale à $3^m,275$; la corde AC, qui sous-tend un arc double de l'arc AB, est égale à

$4^m,120$; calculer à 1 millimètre près le rayon du cercle. On fera le calcul au moyen des tables de logarithmes. (Sorbonne, 1858.)

107. Calculer à 1 centimètre près la corde qui sous-tend un arc de 37°43′ dans un cercle de $542^m,35$ de rayon. (Sorbonne, 1858.)

108. Calculer à $\frac{1}{10}$ de seconde près les angles d'un losange, sachant que le périmètre est égal à $842^m,693$ et que l'une des diagonales est égale à $92^m,355$. (Sorbonne, 1858.)

109. Soit le quadrilatère ABCD, dans lequel on a

$$\text{angle } A = 90°,$$
$$\text{angle } B = 32°25',$$
$$\text{côté } AB = 324^m,35,$$
$$\text{côté } CD = 208^m,15;$$

trouver la surface. (Sorbonne, 1858.)

110. On donne dans un triangle ABC l'angle B égal à 68°26′17″, l'angle C égal à 75°8′23″, et sa hauteur AH égale à $148^m,19$; on demande de calculer les longueurs des trois côtés. (Sorbonne, 1859.)

111. Calculer à 0,1 de seconde près l'angle au sommet d'un triangle isoscèle dont la base est égale à $3452^m,634$ et dont la surface est égale à 5864372 mètres carrés. (Sorbonne, 1859.)

112. Les trois côtés du triangle ABC étant respectivement

$$AB = 1551^m,$$
$$AC = 2068^m,$$
$$BC = 2585^m,$$

trouver la grandeur de la droite AD qui joint le sommet A au milieu de la base BC. (Sorbonne, 1859.)

113. Dans le triangle ABC, on donne

$$DC = 34528,36,$$
$$\text{angle } B = 43°38'12'',4,$$
$$\text{angle } C = 65°7'46'',3;$$

calculer la longueur de AD qui divise l'angle A en deux parties égales. (Sorbonne, 1859.)

114. Dans le triangle BAC, on donne

$$\text{le côté AB} = 23^m,215,$$
$$\text{le côté AC} = 19^m,419,$$
$$\text{l'angle BAC} = 46°29'37'';$$

on demande de calculer la longueur de la bissectrice AO de l'angle. (Sorbonne, 1859.)

115. Calculer en degrés, minutes et secondes la valeur de l'arc de cercle dont le rayon est de 5 mètres, sachant que la surface du secteur qui correspond à cet arc est de 7 mètres carrés. (Sorbonne, 1859.)

116. On donne un triangle ABC, dont les côtés ont les valeurs suivantes :

$$BC = 6^m, \quad AB = 5^m, \quad AC = 2^m.$$

On mène la bissectrice AI de l'angle A et l'on demande de calculer : 1° les surfaces des deux triangles ACI et ABI; 2° la longueur de la parallèle IM à AC, terminée au côté AB en M. (Sorbonne, 1859.)

117. Étant donnés les trois points A, B, C qui font partie d'un réseau trigonométrique, on a relevé le point P en mesurant les angles APB et BPC; on propose de rattacher le point P au canevas principal, en calculant les angles BAP et BCP. On prendra

$$AB = 235^m,415,$$
$$BC = 198^m,923,$$
$$APB = 57°30'28'',$$
$$BPC = 61°29'17'',$$
$$ABC = 118°15'29''.$$

(Sorbonne, 1859.)

118. On connaît une droite AB = 3784 mètres; deux points P et Q sont situés dans un même plan avec cette droite, et ils sont déterminés par rapport à cette droite au moyen des angles

$$PAB = 87°25',$$
$$PBA = 46°34',$$
$$QAB = 47°32',$$
$$QBA = 84°35'.$$

Avec ces données, on propose de calculer la distance PQ. (Sorbonne, 1859.

119. Un côté d'un triangle a pour valeur $35^m,12$, les deux angles adjacents $48°52'13''$ et $75°18'25''$; calculer le troisième angle, les deux côtés qui le comprennent et la surface du triangle. (Sorbonne, 1860.)

120. Dans un triangle, on connaît un des angles de $35°18'46''$ et les deux côtés adjacents, qui sont respectivement de 87 mètres et de 72 mètres. On demande de calculer la surface du triangle. On évaluera cette surface en ares et en centiares. (Sorbonne, 1860.)

121. Dans un triangle ABC on a

le côté $AB = 103^m,38$,
le côté $BC = 98^m,53$,
l'angle $A = 25°17'38''$.

On demande de calculer le côté AC et les angles B et C. (Sorbonne, 1860.)

122. Calculer les trois angles d'un triangle dont les côtés sont

$$a = 19074^m, \quad b = 25432^m, \quad c = 31790^m.$$

(Sorbonne, 1860.)

123. La surface d'un triangle est de 342865 décimètres carrés; on connaît de plus les longueurs de deux côtés, qui sont respectivement $92^m,35$ et $103^m,57$. On demande de calculer l'angle compris entre ces deux côtés. (Sorbonne, 1860.)

124. On a un angle $A = 44°20'12''$; on mène par un point B pris sur l'un des côtés de l'angle, à une distance $AB = 107$ mètres, une droite BC, telle que la surface du triangle ABC soit de 6527 mètres carrés; on demande la longueur de la droite AC et la valeur de l'angle ABC. (Sorbonne, 1860.)

125. Calculer le nombre de degrés, minutes et secondes contenus dans un arc de cercle, sachant que la corde qui le sous-tend est égale aux $\frac{2}{3}$ du diamètre. (Sorbonne, 1860.)

126. Trouver le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, sachant que les trois côtés de ce triangle sont respectivement de 249332 et 415 mètres. (Sorbonne, 1860.)

127. On donne l'angle A d'un triangle et les logarithmes des côtés c, b, qui comprennent cet angle, savoir :

$$A = 69^\circ 51' 28'',5,$$
$$\log c = 3,2714872,$$
$$\log b = 1,1159263.$$

On propose de résoudre le triangle et d'en calculer la surface. (Sorbonne, 1860.)

128. Calculer les éléments d'un triangle, connaissant un angle, la distance des pieds de la hauteur et de la médiane correspondant à cet angle, et enfin l'angle de ces droites. (Sorbonne, 1862.)

129. On donne dans un triangle

$$a = 35^m,42;$$
$$B = 48^\circ 52' 13'';$$
$$C = 75^\circ 18' 25''.$$

Calculer A, b, c et la surface. (Sorbonne, 1864.)

130. Dans un triangle ABC, on a

$$AB = 97^m,25,$$
$$AC = 112^m,79,$$
$$A = 72^\circ 37' 28''.$$

On demande de calculer le côté BC, les angles B et C et la surface. (Sorbonne, 1865.)

131. On donne dans un triangle un angle A et les logarithmes des côtés qui le comprennent, savoir :

$$\log c = 3,2714872,$$
$$A = 69^\circ 51' 28'',5,$$
$$\log b = 1,1159263.$$

Résoudre le triangle et en calculer la surface. (Sorbonne, 1866.)

132. Dans un triangle ABC, on donne

le côté $c = AB = 103^m,38$,
le côté $a = BC = 98^m,53$,
et l'angle $A = 25^\circ 17' 38''$.

On demande de calculer le côté AC et les angles B et C. (Sorbonne, 1864.)

133. Les bissectrices de l'angle droit d'un triangle rectangle partagent l'hypoténuse en deux segments qui ont $4^m,319$ et $5^m,238$ de longueur. Calculer les angles du triangle. (Sorbonne, 1867.)

134. Calculer les trois angles d'un triangle dont les côtés sont 6 mètres, 8 mètres, 10 mètres. (Sorbonne, 1869.)

135. L'un des angles d'un losange circonscrit à un cercle de 68 mètres de rayon est égal à $43°24'37''$. Calculer à 1 décimètre carré près la surface de ce losange. (Sorbonne, 1875.)

136. Calculer le volume du solide décrit par le secteur circulaire AOB autour de AO; l'angle AOB est de 55° et le rayon AO est de $7^m,34$. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 136.)

137. Étant donnés les deux angles

$$p = 28°19'37'',4,$$
$$q = 16°47'\ 3'',6,$$

calculer l'angle x compris entre 0 et 90° et tel que

$$\sin x = \sin p + \sin q.$$

(Sorbonne, 1872.)

138. On donne l'angle BAC et un point D sur l'un des côtés de cet angle. On demande : 1° la formule qui exprime la longueur DE comprise entre le point D et le côté AB et faisant un angle x avec AD; 2° la valeur que doit avoir x pour que la ligne DE soit la plus petite possible; 3° la valeur minimum de DE, en supposant $BAC = 53°28'15''$ et la ligne $AD = 25^m,15$. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 138.)

139. Calculer les côtés d'un triangle dont la surface est de 10 mètres carrés et dont les angles sont respectivement

$$178°30'29'',$$
$$1°\ 0'\ 4'',$$
$$0°29'27''.$$

(Sorbonne, 1868.)

140. Dans un triangle dont on donne les deux côtés a et b et l'angle compris C, on propose de calculer en fonction des données le troisième côté c et de rendre la formule obtenue calculable par logarithmes. (Sorbonne, 1868.)

141. Calculer la surface d'un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle compris C. Les côtés a et b restant constants, on fait varier l'angle C; quel est le triangle dont la surface sera maximum? (Sorbonne, 1868.)

142. On donne le périmètre $2p$ d'un triangle rectangle ABC et la perpendiculaire h abaissée du sommet A de l'angle droit sur l'hypoténuse BC; on demande des formules pour calculer les angles aigus B et C. Le problème est-il toujours possible? (Sorbonne, 1869.)

143. Deux points A et B, dont la distance est connue et égale à D, sont situés dans un même plan horizontal P; le point C est en dehors du même plan. Ayant mesuré les angles $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, ainsi que l'angle γ que AC fait avec le plan P, on demande de calculer la distance du point C au plan P. (Sorbonne, 1868.)

144. Les côtés d'un triangle ont respectivement pour mesure les nombres

$$x^2 + x + 1,$$
$$2x + 1,$$
$$x^2 - 1;$$

la lettre x désigne un nombre quelconque > 1: vérifier que l'angle opposé au côté $x^2 + x + 1$ est un angle de 120 degrés. (Sorbonne, 1869.)

145. Trouver la formule que donne le cosinus d'un angle d'un triangle en fonction des côtés de ce triangle. (Sorbonne, 1872.)

146. On donne dans un triangle le côté a et les angles B et C à la base; exprimer la surface du triangle en fonction de ces données. Maximum de la surface. (Sorbonne, 1870.)

147. Déterminer l'aire d'un triangle en fonction des côtés. (Sorbonne, 1870.)

148. Calculer les côtés d'un triangle dont on donne les angles et le périmètre. On rendra calculables par logarithmes les formules qui donnent la valeur des côtés. (Sorbonne, 1873.)

149. Connaissant l'hypoténuse a d'un triangle rectangle et

l'un des angles aigus B, calculer le rayon du cercle inscrit dans ce triangle. (Sorbonne, 1873.)

150. Résoudre un triangle, connaissant le côté moyen h, la surface m^2 et sachant que les trois angles sont en progression arithmétique. (Sorbonne, 1875.)

151. Résoudre l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

On donnera la condition pour que les valeurs de l'inconnue soient réelles.

Application à l'exemple

$$\sin x + 2 \cos x = 1.$$

(Sorbonne, 1875.)

152. Résoudre un triangle ABC, connaissant le côté BC, l'excès de la somme des deux côtés BC et AC sur le côté AB et sachant que l'angle C est double de l'angle B. (Sorbonne, 1875.)

153. Calculer le sinus de l'angle formé par l'une des arêtes d'un tétraèdre régulier avec l'une des deux faces qui ne comprennent pas cette arête. (Sorbonne, 1875.)

TABLE DES MATIÈRES

QUESTIONS.

ARITHMÉTIQUE.

	Pages.
Approximations, multiplication abrégée. division abrégée	1
Plus grand commun diviseur et plus petit multiple	2
Racines carrées	2
Grandeurs proportionnelles	2
Intérêts simples et escomptes	3
Alliages	3
Problèmes divers	5

ALGÈBRE.

Division des polynômes	7
Équations du premier et du second degré	7
Équations réductibles au second degré	14
Décomposition d'un trinôme du second degré en facteurs du premier degré	15

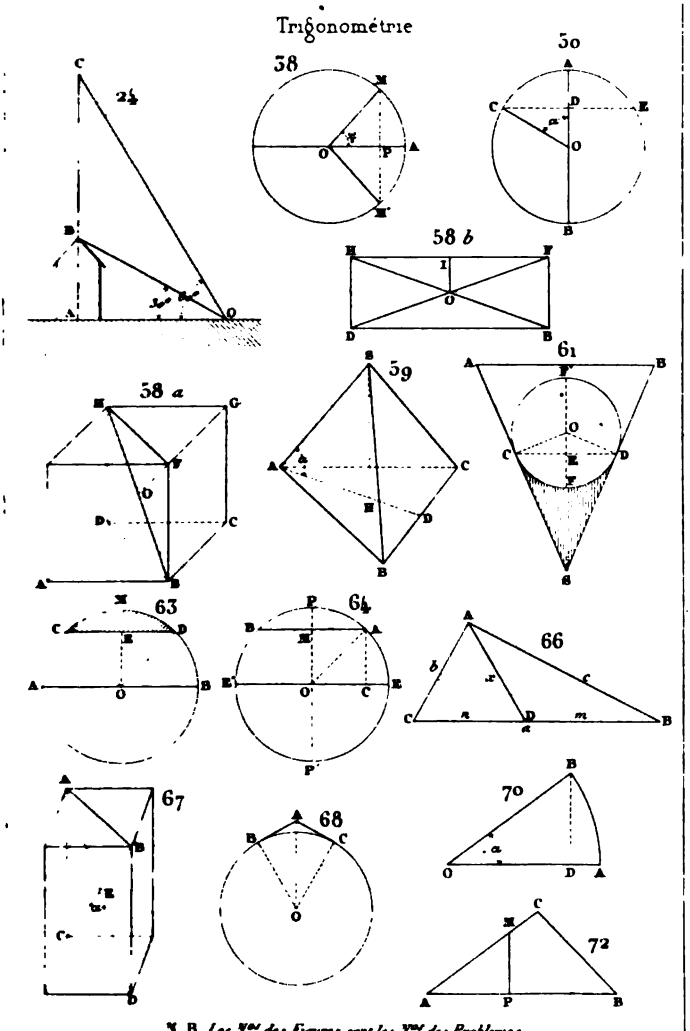
Pages.
Variation d'un trinôme du second degré..... 16
Proportions et progressions par différence et par quotient..... 16
Intérêts composés et annuités..... 18
Calculs par logarithmes..... 20

TRIGONOMÉTRIE.

Addition, multiplication et division..... 21
Formules de relation..... 22
Tables..... 24
Rendre calculable par logarithmes..... 25
Équations trigonométriques..... 25
Applications trigonométriques..... 27
Résolution des triangles..... 32

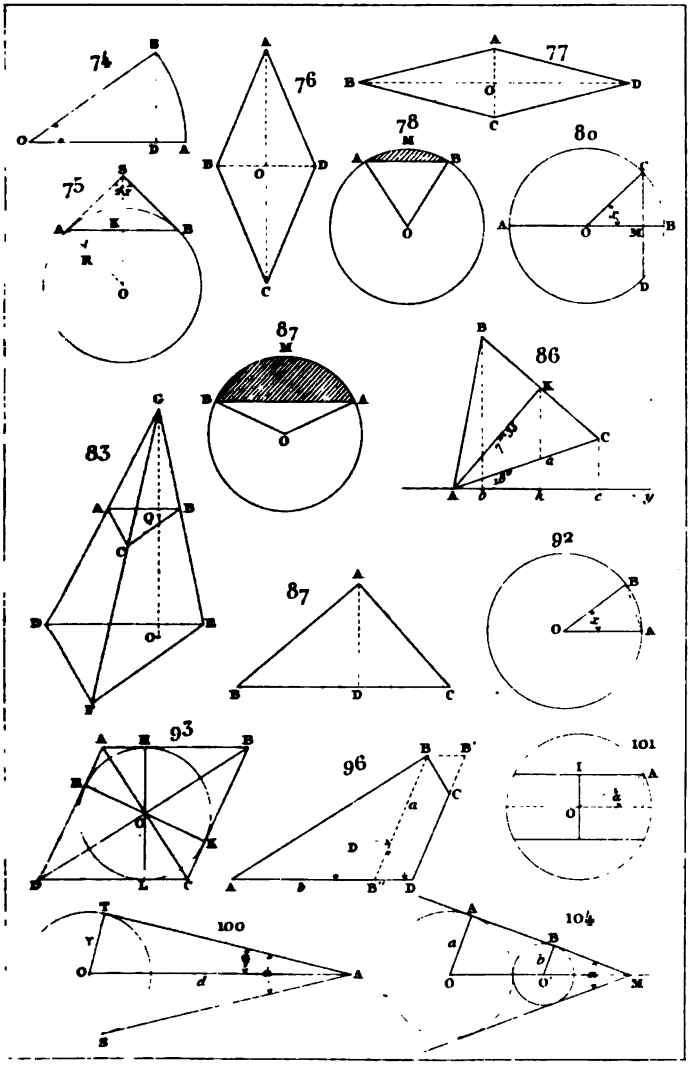
Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4179-76

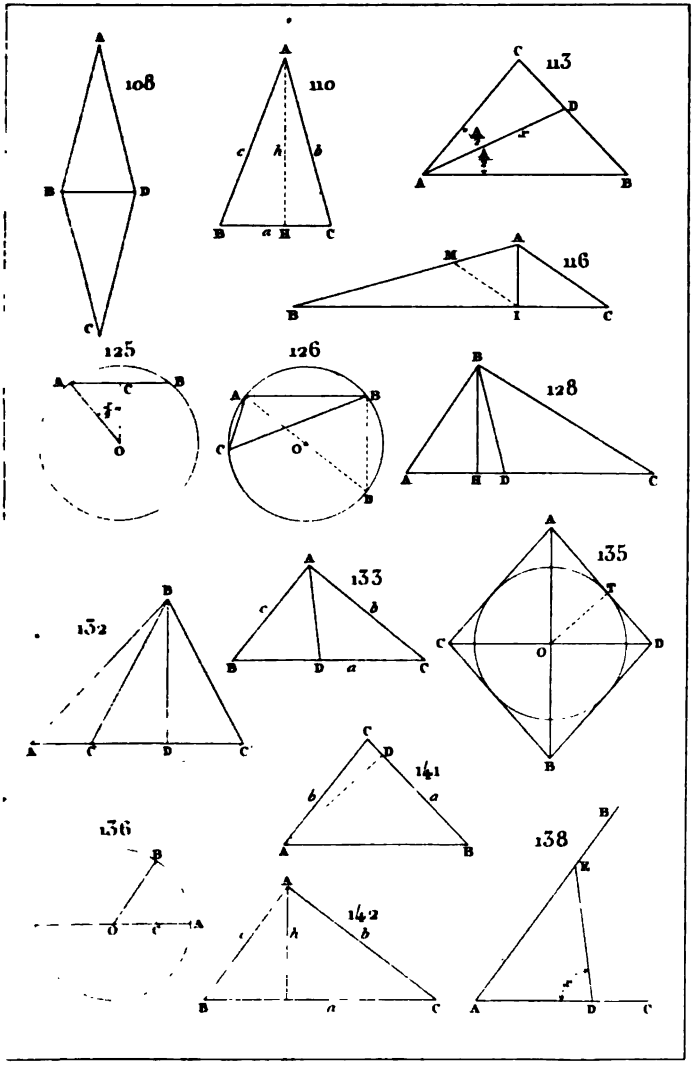
Trigonométrie

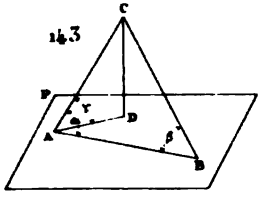


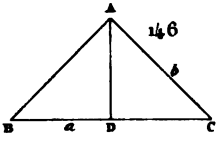
N B Les N^os des Figures sont les N^os des Problèmes

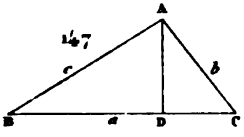
Imp. Lagny, Paris
Gauthier-Villars, Éditeur
Lagny sc.

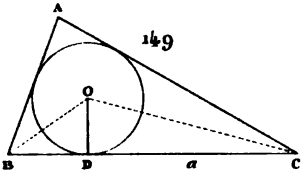

74
75
76
77
78
80
83
86
87
91
92
93
96
100
101
104

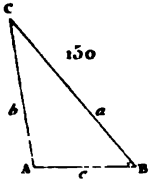

108
110
113
116
125
126
128
132
133
135
136
138
141
142

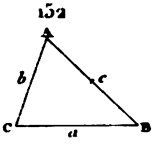

143
C
P
D
A
B

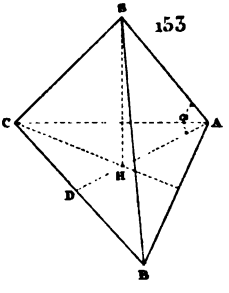

146
A
b
B
a
D
C


147
A
c
b
B
a
D
C


149
A
O
B
D
a
C


150
C
b
a
A
c
B


152
A
b
c
C
a
B


153
E
C
A
H
D
B

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-76.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉS A LA SORBONNE DE 1853 A 1875

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE, DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1846 A 1875,

ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences
et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION

PREMIÈRE PARTIE

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

SOLUTIONS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1876

(Tous droits réservés.)

RECUEIL

DE PROBLÈMES

SOLUTIONS (*)

ARITHMÉTIQUE.

1° APPROXIMATIONS, MULTIPLICATION ABRÉGÉE, DIVISION ABRÉGÉE.

1. Appelons A le dividende exact, A′ le dividende approché, α l'erreur $A - A'$; appelons B le diviseur exact, B′ le diviseur approché, b l'erreur $B - B'$. L'erreur E du quotient est

$$E = \frac{A}{B} - \frac{A'}{B'} = \frac{A' + \alpha}{B' + b} - \frac{A'}{B'} = \frac{\alpha B' - bA'}{B'(B' + b)},$$

$$E < \frac{\alpha B' + bA'}{B'^2},$$

$$E < \frac{2}{10^4} < \frac{1}{10^3};$$

faisons la division abrégée, on a

$$\frac{A}{B} = 0{,}320 \quad \text{à } 0{,}001 \text{ près.} \quad (S.)$$

(*) Les lettres (S.), placées à droite, sont destinées à appeler l'attention du lecteur sur les lignes renfermant les *solutions* des problèmes.

2. L'erreur relative du produit est moindre que la somme des erreurs relatives des facteurs. Cette dernière somme est

$$\frac{0,02}{4897,85} + \frac{0,002}{235,786} < \frac{2}{1000000}.$$

Soient P le produit vrai, P′ le produit approché :

$$\frac{P - P'}{P} < \frac{2}{1000000}, \quad P - P' < \frac{2}{1000000} P,$$

et, comme P est moindre que 1000000,

$$P - P' = \varepsilon < \frac{2}{1000000} \times 10000000,$$

$$\varepsilon < 20 < 100.$$

On ne peut donc compter que sur les centaines du produit; calculé par la multiplication abrégée, on a

$$P' = 1154900. \quad (S.)$$

2° PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT MULTIPLE.

3.

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2,$$
$$1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5,$$
$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

On sait que le plus grand commun diviseur s'obtient en faisant le produit de tous les facteurs communs, affectés chacun de leur plus petit exposant. On aura donc

$$\text{P. G. C. D.} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360. \quad (S.)$$

D'autre part, le plus petit commun multiple est égal au produit de tous les facteurs différents affectés chacun de leur plus grand exposant, d'où

$$\text{P. P. C. M.} = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 50400. \quad (S.)$$

Enfin on sait que tous les diviseurs communs aux trois nombres proposés doivent diviser le plus grand commun diviseur. En conséquence, pour avoir le nombre des diviseurs communs, il suffit de chercher le nombre des diviseurs de 360. Ce nombre s'obtient, comme on sait, en augmentant de l'unité chacun des exposants des facteurs premiers de 360 et en multipliant entre eux ces divers résultats. Si donc N est le nombre de diviseurs cherché, on aura

$$N = (3+1)(2+1)(1+1) = 24. \quad (S.)$$

Ainsi les trois nombres donnés ont 24 diviseurs communs.

3° RACINES CARRÉES.

4. Je multiplie $\frac{5}{7}$ par 1000000, ce qui donne

$$\frac{5000000}{7};$$

j'extrais les entiers, ce qui donne

$$714285;$$

j'extrais la racine de ce nombre à 1 unité près,

$$\sqrt{714285} = 844,$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = 0,844. \quad (S.)$$

5. On peut donner à l'expression proposée la forme très-simple

$$\sqrt{\frac{65}{8-\pi}} - 2.$$

Appliquant les méthodes connues d'approximation, on trouve

$$3,37. \quad (S.)$$

6. Si l'on veut calculer directement le quotient demandé, sans employer les logarithmes, on donnera d'abord à l'expression une forme plus commode, en multipliant les deux termes par

$$\sqrt{355}+\sqrt{113}.$$

On aura ainsi

$$\frac{\sqrt{355}+\sqrt{113}}{\sqrt{355}-\sqrt{113}}=\frac{(\sqrt{355}+\sqrt{113})^2}{355-113}$$

$$=\frac{448+2\sqrt{113.355}}{222}=\frac{224+\sqrt{113.355}}{111}.$$

Pour avoir le résultat à moins de 0,001, il suffira d'évaluer le radical à moins de 0,1; puisque ce radical doit être divisé par un nombre supérieur à 100.

La Trigonométrie permet d'obtenir plus rapidement le résultat. L'expression proposée peut en effet être écrite

$$x=\frac{1+\sqrt{\frac{113}{355}}}{1-\sqrt{\frac{113}{355}}}.$$

Posons

(1) $$\operatorname{tang}\varphi=\sqrt{\frac{113}{355}},$$

il viendra

$$x=\frac{1+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\operatorname{tang}45^\circ+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}45^\circ\operatorname{tang}\varphi},$$

(2) $$x=\operatorname{tang}(45^\circ+\varphi).$$

L'expression (1) fera connaître l'angle auxiliaire φ; on en conclura

$$\log\operatorname{tang}(45^\circ+\varphi),$$

et par suite

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\varphi)\quad\text{ou}\quad x.$$

On trouve ainsi

$$x=3,5906590,$$

et la racine carrée de ce rapport 1,894. (S.)

4° GRANDEURS PROPORTIONNELLES.

7. Cherchons le rapport des valeurs de chaque part d'héritage pour l'un et l'autre des frères. Le premier avait $\frac{11}{20}$ de l'héritage : chacun de ses enfants en a donc $\frac{11}{20 \times 16}$; le deuxième avait $\frac{9}{20}$ de l'héritage : chacun de ses enfants aura $\frac{9}{20 \times 13}$; le rapport des valeurs des deux parts d'héritage est donc

$$\frac{11}{20 \times 16} \times \frac{20 \times 13}{9} = \frac{11 \times 13}{16 \times 9} = \frac{143}{144}.$$

La part la plus avantageuse à acheter est donc celle de la succession du cadet, puisque la part du premier héritier ne vaut que $\frac{143}{144}$ de la part du deuxième. (S.)

8. Les trois parties de la droite seront entre elles comme 2, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ ou comme les nombres 8, 3, 2. La somme de ces nombres est 13; la première partie sera donc égale à

$$26 \times \frac{8}{13} = 16, \quad (S.)$$

$$26 \times \frac{3}{13} = 6, \quad (S.)$$

$$26 \times \frac{2}{13} = 4. \quad (S.)$$

9. Soient x, y, z les longueurs cherchées, nous aurons

$$x + y + z = 257,$$

$$\frac{x^2}{3} = \frac{y^2}{5} = \frac{z^2}{7},$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z}{\sqrt{7}} = \frac{x + y + z}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{257}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}},$$

$$x = \sqrt{3} \times \frac{257}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = 67{,}304, \quad (S.)$$

$$y = \sqrt{5} \times \frac{257}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = 86{,}888, \quad (S.)$$

$$z = \sqrt{7} \times \frac{257}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = 102{,}808. \quad (S.)$$

10.

40	litres	à	0fr,60	coûtent	24fr,00
65	—		1, 30	—	84 ,50
105	litres du mélange coûteront				108 ,50.

1 litre coûtera donc 1fr,03. (S.)

11. Soit x la plus grande partie, on aura

$$x^2 = 12(12 - x),$$

d'où

$$x = 7{,}416, \quad (S.)$$
$$12 - x = 4{,}584. \quad (S.)$$

12. Soit x le temps cherché en jours, nous aurons

$$x = 18 \times \frac{630 \times 50 \times 5{,}5}{187{,}5 \times 33 \times 10} = \frac{180 \times 7}{25} = \frac{180 \times 28}{100} = 50_{j}.4,$$

soit 50 jours 4 heures, puisqu'on fait les journées de 10 heures. (S.)

13. On réduit les trois nombres au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{16}{24}, \quad \frac{144}{24}, \quad \frac{21}{24}.$$

Ils sont alors entre eux comme leurs numérateurs, et il suffit de partager 327 en parties proportionnelles à 16, 144, 21 (voir un traité d'Arithmétique).

Les parts seront 28,91, 260,15, 37,94. (S.)

14. Soit x la plus grande partie, l'autre sera $1 - x$, et l'on aura

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

ou, en élevant au carré,

$$\frac{x^2}{1-2x+x^2}=\frac{3}{2}:$$

de là on tire

$$2x^2=3-bx+3x^2$$

et l'on arrive à l'équation

$$x^2-bx+3=0,$$

d'où

$$x=3\pm\sqrt{6}.$$

La première racine $3+\sqrt{6}$ est supérieure à 1 ; elle ne saurait donc satisfaire à la question, et il faut la rejeter. (Cette solution étrangère a été introduite par l'élévation au carré.) Nous admettrons seulement la racine

$$x=3-\sqrt{6}=0,551\,;\quad (S.)$$

l'autre partie de l'unité sera donc

$$y=1-x=0,449.\quad (S.)$$

5° INTÉRÊTS SIMPLES ET ESCOMPTES.

15. Appelons a le capital, A ce qu'il est devenu au bout du temps t, et c le taux, nous avons

$$A=a\left(1+\frac{ct}{100}\right),$$

d'où

$$c=\frac{100\,(A-a)}{at}.$$

Tel serait l'intérêt de t années ; pour $\frac{280}{360}$ d'année, ce sera donc

$$c=\frac{100\times 147,50}{3227,50\times\frac{280}{360}}=\frac{14750}{3227,50\times\frac{7}{9}}=\frac{14750\times 9}{3227,5\times 7}=5^{fr},86.(S.)$$

16. $5^{fr},50$ d'intérêt pendant 360j représentent 100^{fr} de capital.

$$1 \quad — \quad — \quad 360 \quad — \quad \frac{100}{515} \quad —$$

$$1 \quad — \quad — \quad 1 \quad — \quad \frac{100 \times 360}{5,5} \quad —$$

$$1 \quad — \quad — \quad 8 \text{ mois } 10^j \text{ ou } 250^j \quad — \quad \frac{100 \times 360}{5,5 \times 250} \quad —$$

$$238 \quad — \quad — \quad 250 \quad — \quad \frac{100 \times 360}{5,5 \times 250} \times 238$$

$$= 6231^{fr},27. \quad (S.)$$

17. L'escompte étant de 6 pour 100 pendant 12 mois, il sera de 2 pour 100 pendant 4 mois et de 2×42 pour 4200 fr. pendant 4 mois, soit 84 fr. Le billet vaut actuellement 4116 fr.; il faut donc ajouter 884 fr. (S.)

18. Nous avons à résoudre la règle de trois suivante :

100^{fr} rapportent en un an. . . . . $5^{fr},50$,

x — en $\left(\frac{8}{12} + \frac{3}{360}\right)$ d'année 238^{fr},

$$x = 100 \times \frac{1}{\frac{8}{12} + \frac{10}{360}} \times \frac{238}{5,50} = 623^{fr},12. \quad (S.)$$

19. On détermine l'échéance du payement unique

$$(42000 = 15000 + 27000)$$

par la condition que l'intérêt de ce payement relatif à l'époque actuelle soit égal à la somme des intérêts de deux payements primitifs. Pour simplifier les calculs, on pourra remarquer qu'au lieu du franc on peut prendre pour unité 3000 francs (3000 étant le commun diviseur des nombres donnés). On aura d'après cela, en désignant par x le nombre d'années dans lequel devra avoir lieu le payement unique,

$$\frac{14x \times 3}{100} = \frac{3\left(4 + \frac{6}{12}\right)3}{100} + \frac{9\left(7 + \frac{8}{12}\right)3}{100},$$

puisque

$$15000 = 5 \times 3000,\ 27000 = 9 \times 3000,\ 42000 = 14 \times 3000.$$

Cette relation se réduit à

$$28x = 45 + 138 = 183, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{183}{28},$$

ce qui donne 6 ans 6 mois 13 jours. (S.)

20. $5^{fr},86$ pour 100. (S.)

21. $4^{fr},78$ pour 100. (S.)

22. 965 fr. (S.)

6° ALLIAGES.

23. Soient x et y les poids demandés. On a d'abord

$$(1) \qquad x + y = 15.$$

D'ailleurs, en écrivant que le poids du métal précieux contenu dans l'alliage définitif est la somme des poids de ce même métal contenu dans les deux alliages composants, on a

$$(2) \qquad x \times 0{,}810 + y \times 0{,}785 = 15 \times 0{,}790.$$

On tire de (1)

$$y = 15 - x,$$

d'où

$$x \times 0{,}810 + (15 - x)\,0{,}785 = 15 \times 0{,}790,$$

ou

$$x\,(0{,}810 - 0{,}785) = 15 \times (0{,}790 - 0{,}785),$$

ou

$$x \times 0{,}025 = 15 \times 0{,}005 = 0{,}075;$$

donc

$$x = \frac{0{,}075}{0{,}025} = \frac{75}{25} = 3; \quad \text{(S.)}$$

par conséquent

$$y = 12. \quad \text{(S.)}$$

7° PROBLÈMES DIVERS.

24. Désignons respectivement par x, θ, θ' la profondeur du puits, le temps que met la pierre à tomber et le temps que met le son à monter. On a

$$\theta + \theta' = n, \quad x = \frac{g\theta^2}{2}, \quad x = a\theta';$$

remplaçant dans la première équation θ et θ' par leurs valeurs, il vient

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{a} = n,$$

d'où successivement

$$\frac{2x}{g} = \left(n - \frac{x}{a}\right)^2 = n^2 - \frac{2nx}{a} + \frac{x^2}{a^2},$$

$$2a^2x = gn^2a^2 - 2nagx + gx^2,$$

$$gx^2 - 2a(ng + a)x + ga^2n^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a(a + ng) \pm \sqrt{a^2(a + ng)^2 - a^2n^2g^2}}{g}$$

$$= an + \frac{a^2}{g} \pm \frac{a}{g}\sqrt{a^2 + 2agn}.$$

Le signe $+$ ne peut convenir, car on doit avoir $x = a\theta' < an$; donc

$$x = an + \frac{a^2}{g} - \frac{a}{g}\sqrt{a^2 + 2agn}. \quad \text{(S.)}$$

ALGÈBRE.

1° DIVISION DES POLYNOMES.

1. $$\frac{10a^3b-21a^4b^2-10a^2b^3-3a^2b^4-56ab}{5a^2b-3ab^2+8b^3}$$
$$=2a^3-3a^2b-7ab^2. \quad \text{(S.)}$$

2. Effectuons la division du polynôme proposé par $(x-a)$; on trouve

$$x^3+px^2+qx+r=(x-a)[x^2+(a+p)x+a^2+pa+q]$$
$$+a^3+pa^2+qa+r.$$

Or, a^3+pa^2+qa+r est nul par hypothèse; donc le quotient du polynôme proposé par $(x-a)$ est un polynôme entier et rationnel par rapport à x, ce qu'il fallait démontrer.

On sait d'ailleurs que le trinôme

$$x^2+(a+p)x+(a^2+pa+q)$$

est décomposable en deux facteurs du premier degré en x, qui seront

$$(x-x') \quad \text{et} \quad (x-x''),$$

x' et x'' étant les racines de l'équation

$$x^2+(a+p)x+(a^2+pa+q)=0,$$

et le quadrinôme donné pourra s'écrire

$$(x-a)(x-x')(x-x''), \quad \text{(S.)}$$

ce qui répond à la seconde partie de la question.

3. $\dfrac{32x^5+243}{2x+3}=16x^4-24x^3+36x^2-54x+81.$ (S.)

4. x^m+a^m est divisible par $x+a$ lorsque m est impair.

Démonstration. — En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+\ldots\pm a^{m-1}.$$

Pour que la division donne zéro pour reste, il faut que le produit du dernier terme du quotient $\pm a^{m-1}$ par le dernier terme a du diviseur soit égal à $+a^m$; donc le dernier terme du quotient doit être $+a^m$, et, comme dans le quotient les termes positifs sont de rang impair, il faut que le nombre des termes du quotient, c'est-à-dire m, soit impair. (S.)

2° ÉQUATIONS DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ.

5. Résoudre

(1) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=8$ ou $5x+3y=120,$

(2) $\dfrac{x}{9}-\dfrac{y}{10}=1$ ou $10x-9y=90.$

Si l'on multiplie l'équation (1) par 3 et qu'on ajoute terme à terme avec l'équation (2), il vient

$$25x=450, \quad \text{d'où} \quad x=18. \quad \text{(S.)}$$

De même, si l'on multiplie l'équation (1) par (2) et qu'on retranche terme à terme l'équation (2), il vient

$$15y=150, \quad \text{d'où} \quad y=10. \quad \text{(S.)}$$

6

$$x=\frac{365}{76}, \quad \text{(S.)}$$

$$y=-\frac{13}{76}, \quad \text{(S.)}$$

$$z=\frac{200}{76}. \quad \text{(S.)}$$

7. $x = 5,$ (S.)
$y = 4,$ (S.)
$z = 3.$ (S.)

8. $x = 1{,}30,$ (S.)
$y = 0{,}29,$ (S.)
$z = 3{,}04.$ (S.)

9. $x = 5,$ (S.)
$y = 2,$ (S.)
$z = 3.$ (S.)

10. $x = 7,$ (S.)
$y = 2,$ (S.)
$z = 9,$ (S.)

11. $x = 6,$ (S.)
$y = -1,$ (S.)
$z = 3,$ (S.)
$u = 2.$ (S.)

12. $x = 12,$ (S.)
$y = 30,$ (S.)
$z = 168.$ (S.)

13. $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$mx + ny + pz = d.$$

Nous aurons

$$\frac{mx}{ma} = \frac{ny}{nb} = \frac{pz}{pc} = \frac{mx + ny + pz}{ma + nb + pc} = \frac{d}{ma + nb + pc},$$

d'où

$$x = a\,\frac{d}{ma + nb + pc}, \quad \text{(S.)}$$

$$y = b\,\frac{d}{ma + nb + pc}, \quad \text{(S.)}$$

$$z = c\,\frac{d}{ma + nb + pc}. \quad \text{(S.)}$$

14. On donne

$$x + y = \frac{21}{8},$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{25}{6},$$

équations qui donnent pour x et y

$$\begin{aligned} x' &= -2{,}1922, \quad (\text{S.}) \\ x'' &= 2{,}5574, \quad (\text{S.}) \\ y' &= 3{,}8172, \quad (\text{S.}) \\ y'' &= 0{,}0676. \quad (\text{S.}) \end{aligned}$$

15. Résoudre le système

$$\begin{aligned} &(1) \quad x + y + z = a, \\ &(2) \quad y + z + u = b, \\ &(3) \quad z + u + x = c, \\ &(4) \quad u + x + y = d. \end{aligned}$$

Ajoutons les quatre équations, nous aurons

$$3(x + y + z + u) = (a + b + c + d),$$

$$x + y + z = a = \frac{1}{3}(a + b + c + d) - 3u,$$

$$u = \frac{1}{3}(b + c + d - 2a), \quad (\text{S.})$$

$$y = \frac{1}{3}(a + b + d - 2c), \quad (\text{S.})$$

$$z = \frac{1}{3}(a + b + c - 2d), \quad (\text{S.})$$

$$x = \frac{1}{3}(a + c + d - 2b). \quad (\text{S.})$$

16. On donne

$$(1), (2) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$3) \qquad x + y + z = d.$$

Ajoutons les numérateurs et les dénominateurs de (1), (2) :

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{d}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

d'où

$$x=a\,\frac{d}{a+b+c}, \quad (S.)$$

$$y=b\,\frac{d}{a+b+c}, \quad (S.)$$

$$z=c\,\frac{d}{a+b+c}. \quad (S.)$$

17. x et y^2 sont les racines de l'équation $z^2-11z+18=0$, équation dont les racines sont

$$z=9,$$
$$z=2.$$

On a donc pour solutions du système proposé

(1) $$\begin{cases} x=\ \ 2, & (S.)\\ y=\pm 3, & (S.)\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x=\ \ 9, & (S.)\\ y=\pm\sqrt{2}. & (S.)\end{cases}$$

18. Le système admet deux solutions :

(1) $$\begin{cases} x=\ \ 42{,}93, & (S.)\\ y=\ \ 70{,}96, & (S.)\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x=-100{,}54, & (S.)\\ y=-\ \ 8{,}74. & (S.)\end{cases}$$

19. Ce système du second degré à deux inconnues admet quatre solutions :

$$\begin{aligned}
x_1&=\ \ 10{,}524, & (S.)\\
y_1&=\ \ 0{,}015, & (S.)\\
x_2&=-10{,}524, & (S.)\\
y_2&=-\ 0{,}015, & (S.)\\
x_3&=\ \ 0{,}672, & (S.)\\
y_3&=\ \ 3{,}692, & (S.)\\
x_4&=-\ 0{,}672, & (S.)\\
y_4&=-\ 3{,}692. & (S.)
\end{aligned}$$

20. Si l'on pose $\sqrt{x} = y$, l'équation devient

$$y^2 - y - 6 = 0,$$

ce qui donne pour y

$$y' = 3, \quad y'' = -2,$$

et par suite, pour x,

$$x' = 9, \quad x'' = 4. \quad (S.)$$

La valeur x'' n'est admissible qu'autant qu'on donne à $\sqrt{x}$ le signe —.

21. Les solutions sont

$$x = -\frac{35}{47}, \quad (S.)$$

$$y = +\frac{26}{141}. \quad (S.)$$

22. Résoudre

(1) $$3x^2 - 2y^2 = 19,$$

(2) $$2x^2 + 5y^2 = 38.$$

Multipliant (1) par (2), on obtient

$$6x^2 - 4y^2 = 38 = 2x^2 + 5y^2,$$

d'où

$$4x^2 = 9y^2,$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{4}.$$

La fraction $\frac{9}{4}$ étant irréductible, on a forcément

$$x^2 = m \times 9,$$
$$y^2 = m \times 4.$$

Remplaçons x^2 et y^2 par ces valeurs dans (1), on obtient

$$27m - 12m = 19,$$
$$m = 1;$$

donc

$$x^2 = 9,$$
$$y^2 = 4,$$

ce qui donne pour x et y les quatre systèmes de valeurs

$$x = \pm 3, \quad y = \quad 2, \quad (S.)$$
$$x = \pm 3, \quad y = -2. \quad (S.)$$

On aurait pu prendre x' et y' pour inconnues, et l'on aurait eu à résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. La solution donnée est particulière au cas proposé.

23. On donne

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = 3,$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 - xy = 3;$$

retranchant (1) de (2), on obtient

$$2y^2 - xy = 0,$$

équation qui a pour solutions

$$y = 0,$$
$$x = 2y,$$

ce qui donne les quatre systèmes

$$y = 0, \qquad x = \pm\sqrt{3}, \quad (S.)$$
$$y = \pm 1, \quad x = \pm 2. \quad (S.)$$

24. On obtient en chassant les dénominateurs, ce qui suppose $x >< 0$,

$$x = \pm\sqrt{ab}; \quad (S)$$

$x = 0$ peut être regardé comme une solution.

25.
$$x = a \pm \frac{\sqrt{9a^2 + 32ab}}{4}. \quad (S)$$

26. Nous poserons pour un moment

$$x^2 - y^2 = A,$$
$$xy = B.$$

Les valeurs de x et de y sont données par les formules

$$x = \pm\sqrt{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B^2}},$$

$$y = \pm\sqrt{-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B^2}};$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs

$$x = \pm 2{,}143, \quad (S.)$$
$$y = \pm 1{,}515. \quad (S.)$$

27. Chassant les dénominateurs et réduisant, on trouve

$$30x^2 - 144x - 1560 = 0,$$

d'où

$$5x^2 - 24x - 260 = 0,$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 5 \times 260}}{5},$$

$$x' = \quad 10, \quad (S.)$$
$$x'' = - \quad 5{,}2. \quad (S.)$$

28.

$$(1) \qquad 3x^2 + 2y^2 = 813,$$
$$(2) \qquad 7x - 4y = 17.$$

De la deuxième équation, on tire

$$y = \frac{7x - 17}{4},$$

substituant cette valeur de y dans la première équation, il vient

$$3x^2 + 2\,\frac{(7x - 17)^2}{16} = 813,$$

d'où

$$73x^2 - 238x - 6215 = 0,$$

$$x = \frac{119 \pm \sqrt{119^2 + 73 \times 6215}}{73} = \frac{119 \pm 684}{73},$$

$$x' = \quad 11, \quad (S.) \qquad y' = \quad 15, \quad (S.)$$
$$x'' = - \quad 7{,}7397, \quad (S.) \qquad y'' = -17{,}7945. \quad (S.)$$

C'est le triangle rectangle isoscèle.

29. Élevant au carré, il vient

$$x + 1 + x + 6 + 2\sqrt{(x + 1)(x + 6)} = 25,$$

d'où successivement

$$2x + 7 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 6} = 25,$$
$$2\sqrt{x^2 + 7x + 6} = 18 - 2x,$$
$$\sqrt{x^2 + 7x + 6} = 9 - x.$$

Élevant de nouveau au carré, nous avons

$$x^2 + 7x + 6 = 81 - 18x + x^2,$$

d'où

$$25x = 75,$$

d'où enfin

$$x = \frac{75}{25} = 3. \quad \text{(S.)}$$

30. On tire de la première équation

$$x = \frac{16 - 3y}{2},$$

d'où, en portant cette valeur dans la seconde,

$$3\left(\frac{16 - 3y}{2}\right)^2 - 2y^2 = 67,$$

ou

$$3(256 - 96y + 9y^2) - 8y^2 = 268,$$

ou

$$768 - 288y + 27y^2 - 8y^2 = 268,$$

ou enfin

$$19y^2 - 288y + 500 = 0;$$

on en déduit

$$y = \frac{144 \pm \sqrt{(144)^2 - 500 \times 19}}{19},$$

ou

$$y = \frac{144 \pm \sqrt{20736 - 9500}}{19} = \frac{144 \pm \sqrt{11236}}{19};$$

d'ailleurs,

$$\sqrt{11236} = 106;$$

donc

$$y = \frac{144 \pm 106}{19};$$

par suite,

$$y' = \frac{250}{19} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{38}{19} = 2;$$

par conséquent,

$$x' = \frac{16 - 3y'}{2} = \frac{16 - \frac{750}{19}}{2} = 8 - \frac{375}{19} = -\frac{223}{19}$$

et
$$x'' = \frac{16 - 3y''}{2} = \frac{16 - 6}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Les solutions du système sont donc

$$1^\circ \begin{cases} x' = -\dfrac{223}{19}, & (S.) \\ y' = +\dfrac{250}{19}. & (S.) \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} x'' = 5, & (S.) \\ y'' = 2. & (S.) \end{cases}$$

31. La formule est
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$
$$x' = 768{,}169, \quad (S.)$$
$$x'' = 110{,}831. \quad (S.)$$

32. J'élève (1) au carré et je retranche le résultat de (2); il vient

(3) $$2xy = 13{,}196 - \overline{1{,}023}^2 = 12{,}149471;$$

ajoutons (3) à (2), il vient
$$(x + y)^2 = \sqrt{25{,}345471} = 5{,}034;$$
connaissant la somme et la différence de deux nombres, on aura
$$x = 3{,}0285 \quad (S.) \quad \text{et} \quad y = 2{,}0055. \quad (S.)$$

33. En désignant par x la première partie et par y la seconde, les équations du problème sont
$$x + y = 27 \quad \text{et} \quad 4x^2 + 5y^2 = 1620.$$
Éliminant y entre ces deux équations, on obtient
$$9x^2 - 10.27x + 5.27^2 - 1620 = 0.$$

Tous les termes de cette équation sont divisibles par 9, et il vient, toute réduction faite,
$$x^2 - 30x + 15^2 = 0,$$
ou
$$(x - 15)^2 = 0.$$

Ainsi la valeur de la première partie est
$$x = 15,$$
et la valeur correspondante de y est
$$y = 27 - x = 27 - 15 = 12.$$

Le système unique de solution est donc

$$\begin{cases} x = 15, & (S.) \\ y = 12. & (S.) \end{cases}$$

Ce fait, que l'équation qui fournit x a deux racines égales, doit faire pressentir que la somme 1620 correspond à un minimum.

34. Soient x et y les nombres

(1) $$x - y = 17,$$

(2) $$x^3 - y^3 = 29393.$$

Divisant (2) par (1), on a

(3) $$x^2 + xy + y^2 = 1729.$$

Élevant (1) au carré, on a

(4) $$x^2 - 2xy + y^2 = 289.$$

Donc

$$3xy = 1440,$$
$$xy = 480,$$

et alors

$$x' = 32, \quad (S.)$$
$$y' = 15, \quad (S.)$$
$$x'' = -15, \quad (S.)$$
$$y'' = -32. \quad (S.)$$

35. Si l'on désigne par x le plus petit côté, les autres seront

$$x, \quad x+1, \quad x+2.$$

On aura, le triangle étant rectangle,

$$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2,$$

ou bien

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2,$$

ou enfin

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

d'où

$$x = 1 \pm \sqrt{4}.$$

Rejetant la valeur négative, il vient

$$x = 1 + 2 = 3;$$

donc les trois côtés sont

$$3, 4, 5. \quad (S.)$$

36. Soient x et y les deux nombres, nous aurons

$$xy = K,$$
$$x^2 - y^2 = m;$$

ce qui donne deux systèmes de valeurs

$$(1) \qquad \begin{cases} x = 59{,}01, & (S.) \\ y = 46{,}75. & (S.) \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = -59{,}01, & (S.) \\ y' = -46{,}75. & (S.) \end{cases}$$

37. Posons

$$x + y = z,$$
$$x^3 + y^3 = u;$$

les équations de condition deviennent

$$z = 28,$$
$$\left(\frac{28+u}{2}\right)^3 + \frac{28-u}{2} = 6244,$$

ce qui donne

$$x = 17, \quad (S.)$$
$$y = 11. \quad (S.)$$

38. Nous aurons

$$(1) \qquad x + y = 16,$$
$$(2) \qquad x^2 - y^2 = 32.$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad (x+y)(x-y) = 32,$$

d'où, divisant (3) par (1),

$$x - y = 2;$$

donc

$$x = 9, \quad (S.)$$
$$y = 7. \quad (S.)$$

39. Appelant x et y ces côtés, on a

$$xy = 6382,$$
$$x + y = \frac{458{,}36}{2} = 229{,}18.$$

Les nombres x et y sont les racines de l'équation

$$z^2 - 229{,}18z + 6382 = 0,$$

d'où

$$z' = x = \frac{229{,}18}{2} + \sqrt{\frac{(229{,}18)^2}{4} - 6382} = 196^m{,}74, \quad (S.)$$

$$z'' = y = \frac{229{,}18}{2} - \sqrt{\frac{(229{,}18)^2}{4} - 6382} = 32^m{,}44. \quad (S.)$$

40. Appelons x le chiffre des centaines, y celui des dizaines et z celui des unités, nous aurons les équations

$$(1) \qquad x + y + z = 11,$$

$$(2) \qquad x = 2y,$$

$$(3) \qquad 100x + 10y + z - 396 = 100z + 10y + x,$$

qui donnent

$$x = 6, \quad (S.)$$
$$y = 3, \quad (S.)$$
$$z = 2. \quad (S.)$$

41. Si x est l'une des parties, $(590 - x)$ sera l'autre; on aura

$$x(590 - x) = 80464,$$

d'où

$$x = 376. \quad (S.)$$
$$590 - x = 214. \quad (S.)$$

42. Appelons x et y les deux nombres, nous aurons les équations

$$(1) \qquad x + y = 23,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 277.$$

Élevons (1) au carré et retranchons-en (2), nous obtiendrons

$$xy = 126;$$

x et y sont donc les racines de l'équation

$$z^2 - 23z + 126 = 0,$$

qui donne

$$x = 14. \quad (S.)$$
$$y = 9. \quad (S.)$$

43. Soient V le vase plein d'eau, V′ le vase plein de vin ; soit x la capacité du troisième vase; on retire du premier vase une quantité d'eau x, il en reste $V-x$; on y met un volume x de vin, le rapport de l'eau au vin est donc $\frac{V-x}{x}$; on voit de même que pour le deuxième vase le rapport de l'eau au vin est $\frac{x}{V'-x}$; on veut avoir

$$\frac{V-x}{x}=\frac{x}{V'-x}.$$

La capacité du troisième vase est

$$x=\frac{V+V'}{VV'}. \quad (S.)$$

44. Soient x et y les deux nombres

$$x+y=a,$$
$$4x^2-y^2=b,$$

d'où l'on tire

$$3x^2+2ax-(a^2+b)=0,$$

(1) $$\begin{cases} x=-3021{,}307, & (S.) \\ y=6038{,}307; & (S.) \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x=1009{,}973, & (S.) \\ y=2007{,}027. & (S.) \end{cases}$$

45. En désignant par x et y les côtés de l'angle droit, on a

(1) $$\frac{xy}{2}=12^m{,}65,$$

(2) $$x^2-y^2=17{,}35=b;$$

j'élève (1) au carré, il vient

(3) $$x^2y^2=640{,}09,$$

ou bien

$$x^2\times(-y^2)=640{,}09;$$

je pose

$$x^2=X \quad \text{et} \quad -y^2=Y.$$

Les équations (2), (3) deviennent

$$X+Y=17{,}35 \quad \text{et} \quad XY=-640{,}09;$$

X et Y sont les racines de l'équation

$$Z^2 - 17{,}35z - 640{,}09 = 0;$$

d'où l'on tire

$$Z = 8{,}675 \pm \sqrt{8{,}675^2 + 640{,}09} = 8{,}675 \pm \sqrt{715{,}345625}.$$

On aura

$$X = x^2 = \quad 8{,}675 + \sqrt{715{,}345625},$$

$$-Y = y^2 = -8{,}675 + \sqrt{715{,}345625}.$$

Il faut avoir x et y à $\frac{1}{1000}$ près; il faut donc calculer x^2 et y^2 avec six décimales. On obtient

$$x = 5^m{,}951, \quad (S.)$$
$$y = 4^m{,}250. \quad (S.)$$

46. On a, en désignant ces nombres par x et y,

(1) $$x - y = 6,$$
(2) $$x^3 - y^3 = 3582,$$

d'où

(3) $$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 = 597.$$

Élevant (1) au carré et retranchant de (3), il vient

$$3xy = 561,$$

d'où

$$xy = 187.$$

En posant $y = -z$, il vient

$$x + z = 6,$$
$$xz = -187;$$

x et z sont ainsi les racines de l'équation

$$X^2 - 6X - 187 = 0,$$

qui donne

$$X' = 3 + \sqrt{9 + 187} = 3 + \sqrt{196} = 17,$$

$$X'' - 3 - \sqrt{9 + 187} = 3 - \sqrt{196} = -11.$$

On en déduit

$$x = 17, \quad (S.)$$
$$y = -x = 11. \quad (S.)$$

47. Soient x et y ces deux nombres, on aura

(1) $$x - y = 7,85,$$

(2) $$x^2 + y^2 = 392,8853;$$

j'élève (1) au carré, il vient

(3) $$x^2 + y^2 - 2xy = \overline{7,85}^2 = 61,6225.$$

En retranchant (3) de (2), il vient

(4) $$2xy = 392,8853 - 61,6225 = 331,2628.$$

Ajoutant (4) à (2), on aura

$$(x + y)^2 = 724,1481,$$

d'où

$$x + y = 26,91.$$

Ayant la somme et la différence de deux nombres x et y, on en déduit

$$x = \frac{26,91 + 7,85}{2} = 17,38, \quad (S.)$$

$$y = \frac{26,91 - 7,85}{2} = 9,53. \quad (S.)$$

48. x et y désignant les nombres cherchés, nous aurons

(1) $$x + y = 18,$$

(2) $$xy = 17.$$

De (1) on tire

$$y = 18 - x;$$

substituant dans (2), il vient

$$x^2 - 18x + 17 = 0,$$

d'où

$$x = 9 + \sqrt{64} \quad \text{et} \quad x' = 9 - \sqrt{64};$$

or

$$y = 18 - x.$$

Les valeurs correspondantes de y sont donc

$$9 - \sqrt{64} \quad \text{et} \quad 9 + \sqrt{64}.$$

Les deux nombres cherchés sont donc les racines

$$9 + 8 \text{ ou } 17 \text{ (S.) et } 9 - 8 \text{ ou } 1 \text{ (S)}$$

de l'équation $x^2 - 18x + 17 = 0$.

49. x et y étant les nombres cherchés, on a

$$x+y=590 \quad \text{et} \quad xy=80464;$$

de là l'équation du second degré

$$X^2-590X+80464=0,$$

qui fournit pour racines

$$\frac{590}{2}+\sqrt{\left(\frac{590}{2}\right)^2-80464},$$

$$\frac{590}{2}-\sqrt{\left(\frac{590}{2}\right)^2-80464}.$$

Ainsi les nombres cherchés sont

$$376 \quad (S.) \quad \text{et} \quad 214 \quad (S.)$$

50. Première méthode. — x' et x'' désignant les racines de l'équation $x^2+px+q=0$, on sait que l'on a

$$x'+x''=-p \quad \text{et} \quad x'x''=q.$$

En élevant au carré la première de ces relations, il vient

$$x'^2+x''^2+2x'x''=p^2,$$

d'où l'on tire

$$x'^2+x''^2=p^2-2x'x''=p^2-2q. \quad (S.)$$

Deuxième méthode. — L'équation qui admet pour racines les carrés des racines de l'équation $x^2+px+q=0$ s'obtient en remplaçant x par $\sqrt{x}$ dans cette équation, car il est clair que, si la substitution d'un nombre α à la place de x vérifie la première, la substitution du carré α^2 de ce même nombre vérifiera la seconde, puisque cette substitution donnera identiquement le même résultat. Cette deuxième équation sera

$$(\sqrt{x})^2+p\sqrt{x}+q=0,$$

ou

$$x+p\sqrt{x}+q=0.$$

On en déduit

$$p^2x=(x+q)^2=x^2+2qx+q^2,$$

ou

$$x^2+x(2q-p^2)+q^2=0.$$

Les racines de cette équation étant x'^2 et x''^2, on en déduit

$$x'^2 + x''^2 = p^2 - 2q. \quad (S.) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

51. Soient a l'hypoténuse, x et y les côtés de l'angle droit, z la hauteur, b la somme des trois lignes x, y, z. On a

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$
$$(2) \qquad x + y = b - z,$$

et enfin, en observant que la surface du triangle peut s'écrire indifféremment $\frac{xy}{2}$ ou $\frac{az}{2}$,

$$(3) \qquad xy = az.$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (2), on a

$$(4) \qquad (x+y)^2 = b^2 - 2bz + z^2.$$

D'autre part, (1) et (3) donnent

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2az,$$

égalité dont le premier membre est identique à celui de l'équation (4). On en tire

$$b^2 - 2bz + z^2 = a^2 + 2az,$$

ou

$$(5) \qquad z^2 - 2(b+a)z + b^2 - a^2 = 0.$$

Résolvant,

$$z = b + a \pm \sqrt{2a(a+b)}. \quad (S.)$$

Ces deux valeurs de z sont positives, puisqu'on voit, en consultant les coefficients de l'équation (5), que la somme, ainsi que le produit des racines, est > 0. Mais z doit être moindre que b; on devra donc prendre le signe — devant le radical et écrire

$$(6) \qquad z = b + a - \sqrt{2a(a+b)}.$$

On peut donc désormais considérer z comme une quantité connue.

Pour avoir x et y, on remarquera que les équations (1) et (3) donnent

$$x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 2az,$$

ou

$$(x-y)^2 = a(a-2z),$$

ou enfin

$$x-y = \sqrt{a(a-2z)}.$$

Mais on a déjà (2)

$$x+y = b-z;$$

on en tire

$$x = \frac{b-z+\sqrt{a(a-2z)}}{2}, \quad (S.)$$

$$y = \frac{b-z-\sqrt{a(a-2z)}}{2}, \quad (S.)$$

$$z = \frac{b+a \pm \sqrt{2a(a+b)}}{2}. \quad (S.)$$

Le problème n'est possible que si les racines sont réelles, c'est-à-dire si l'on a $2z < a$, ce qui est évident *à priori*, puisque le triangle étant rectangle est inscriptible dans une demi-circonférence et que la valeur maxima de sa hauteur est égale au rayon. D'ailleurs, cette condition devient, si l'on remplace z par sa valeur (6), $b > a$.

52. Soient x et y les deux nombres, on a

(1) $$x+y = a,$$

(2) $$\sqrt{x}+\sqrt{y} = b,$$

ou, en élevant au carré les deux nombres de l'équation (2)

$$x+y+2\sqrt{xy} = b^2;$$

remplaçant $x+y$ par sa valeur a,

$$2\sqrt{xy} = b^2-a \quad \text{ou} \quad 4xy = (b^2-a)^2,$$

d'où enfin

$$xy = \frac{(b^2-a)^2}{4}.$$

On a ainsi le produit des inconnues, et l'équation (1) en donne la somme; donc x et y sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - az + \frac{(b^2-a)^2}{4} = 0,$$

qui donne, après réduction,

$$z = \frac{a \pm b\sqrt{2a - b^2}}{2}.$$

Ainsi

$$x = \frac{a + b\sqrt{2a - b^2}}{2}, \qquad y = \frac{a - b\sqrt{2a - b^2}}{2},$$

valeurs qui ne sont réelles que si l'on a $2a > b^2$.

L'application numérique $x + y = 25$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$ donne

$$x = 16, \quad y = 9. \quad (S.)$$

53. Quand l'observateur a entendu le bruit du choc, la pierre a déjà parcouru un espace BM pour retomber; car il a fallu au son un certain temps pour arriver de B en A. La vitesse du son étant de 340 mètres par seconde, il lui faudra, pour parcourir l'espace $BA = x$, un temps égal à $\frac{x}{340}$.

Donc $\frac{x}{340}$ représente la durée de la chute de B en M, et le temps observé t ne correspond qu'à une durée de chute MA Si donc on appelle T la durée totale de la chute BA, on a

$$(1) \qquad t = T - \frac{x}{340}.$$

D'ailleurs, au moment où la chute a commencé en B, la pierre possédait une vitesse initiale nulle, et l'espace parcouru x s'obtiendra par la relation

$$x = \frac{1}{2} g T^2,$$

d'où $T = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, valeur qui, reportée en (1), donne

$$(2) \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{g}} - \frac{x}{340},$$

d'où

$$t + \frac{x}{340} = \sqrt{\frac{2x}{g}} \quad \text{et} \quad t^2 + \frac{2tx}{340} + \frac{x^2}{340^2} = \frac{2x}{g},$$

d'où

$$(3) \qquad gx^2 - 2 \times 340(340 - gt)x + \overline{340}^2 gt^2 = 0$$

et

$$x = \frac{340(340 - gt) \pm \sqrt{340(340 - 2gt)}}{g} \quad (S.)$$

La condition de possibilité du problème étant que le temps observé t soit positif, il faut que l'on ait dans l'équation (2)

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} > \frac{x}{340}, \quad \text{d'où} \quad x < \frac{340}{g}(2 \times 340),$$

condition qui se trouve réalisée si l'on prend le signe + devant la racine.

54. De la première équation on tire $y = x - a$. Substituant dans la seconde, il vient

$$bx^2 - c(x-a)^2 = d, \quad \text{ou} \quad (b-c)x^2 + 2acx - ca^2 - d = 0,$$

d'où, toutes réductions faites,

$$x = \frac{-ac \pm \sqrt{bca^2 + bd - cd}}{b-c} \quad \text{(S.)}$$

et pour y

$$y = x - a = \frac{-ab \pm \sqrt{bca^2 + bd - cd}}{b-c}. \quad \text{(S.)}$$

Cas particulier. — Si nous remplaçons c par b, nous avons, en prenant successivement le signe — et le signe + devant le radical,

$$(1) \quad x = \frac{-2ab}{b-b} = \frac{2ab}{0} = \infty, \qquad y = \frac{-2ab}{0} = \infty;$$

$$(2) \quad x = \frac{-ab + ab}{b-b} = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{-ab + ab}{b-b} = \frac{0}{0}.$$

Ainsi une valeur devient infinie pour x et pour y. Quant à l'indétermination du système (2), elle n'est qu'apparente. En effet, multipliant par $-ac - \sqrt{bca^2} + bd + cd$ les deux termes de la valeur de x qui correspond au signe +, on a

$$x = \frac{(-ac + \sqrt{bca^2 + bd - cd})(-ac - \sqrt{bca^2 + bd - cd})}{(b-c)(-ac - \sqrt{bca^2 + bd - cd})};$$

$$= \frac{a^2c^2 - bca^2 - bd + cd}{(b-c)(-ac - \sqrt{bca^2 + bd - cd})} = \frac{-a^2c - d}{(-ac - \sqrt{bca^2 + bd - cd})}$$

$$= \frac{-a^2c - d}{-ac - \sqrt{bca^2 + bd - cd}} = \frac{a^2c + d}{ac + \sqrt{bca^2 + bd - cd}}.$$

Remplaçant c par b dans cette valeur de x transformée,

$$x = \frac{a^2b + d}{2ab}, \quad (S.)$$

et, par un calcul analogue,

$$y = \frac{d - a^2b}{2ab}. \quad (S.)$$

Observons, d'ailleurs, que pour $c = b$ l'équation

$$(b - c)x^2 + 2acx - ca^2 - d = 0$$

se réduit à $2abx - ba^2 - d = 0$. Le coefficient de x^2 s'annulant, l'une des racines passe à l'infini, l'autre est donnée par une équation du premier degré.

55. De la première équation on tire $y = x - a$, d'où

$$y^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3;$$

substituant dans la seconde,

$$x - x + 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = b,$$
$$3ax^2 - 3a^2x + a^3 - b = 0,$$

d'où

$$x = \frac{3a^2 \pm \sqrt{9a^4 - 12a(a^3 - b)}}{6a} = \frac{3a^2 \pm \sqrt{12ab - 3a^4}}{6a}.$$

La condition de réalité des racines est

$$12ab - 3a^4 > 0 \quad \text{ou} \quad 4b - a^3 > 0 \quad \text{ou encore} \quad b > \frac{a^3}{4}.$$

La somme des racines de l'équation est $\frac{3a^2}{3a} = a$. La plus grande valeur de x est donc toujours positive. Pour que la plus petite le soit, il faut que le produit $\frac{a^3 - b}{3a}$ des racines soit positif ou que l'on ait $a^3 - b > 0$ ou $b < a^3$.

Quant à y, on a

$$y = x - a = \frac{3a^2 \pm \sqrt{12ab - 3a^4}}{6a} - a = \frac{-3a^2 \pm \sqrt{12ab - 3a^4}}{6a}.$$

Une des racines est toujours négative. Pour que l'autre soit positive, il faut

$$\sqrt{12ab - 3a^4} > 3a^2 \quad \text{ou} \quad 12ab - 3a^4 > 9a^4 \quad \text{ou encore} \quad b > a^3.$$

En résumé, si les deux valeurs de x sont positives, les deux valeurs correspondantes de y sont négatives et réciproquement. Si la condition $b > 3$ est satisfaite, la condition $b > \frac{a^2}{4}$ l'est *à fortiori*.

Les racines sont réelles, mais de signe contraire pour x et pour y. Les deux racines positives sont

$$x = \frac{3a + \sqrt{12ab - 3a^4}}{6a}, \qquad \text{(S.)}$$

$$y = \frac{-3a + \sqrt{12ab - 3a^4}}{6a}. \qquad \text{(S.)}$$

Les deux autres racines sont négatives.

3° ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

56. On a

(1) $$x + y = 10,$$

(2) $$x^2 + y^2 = 200;$$

je divise (2) par (1), il viendra

(3) $$x^2 - xy + y^2 = 20;$$

j'élève (1) au carré, on aura

(4) $$x^2 + 2xy + y^2 = 100;$$

je retranche (3) de (4), on obtient

$$3xy = 80,$$

d'où

$$xy = \frac{80}{3}.$$

Connaissant ainsi la somme et le produit des nombres x et y, on sait qu'ils seront les racines de l'équation

$$X^2 - 10X + \frac{80}{3} = 0,$$

ou

$$3X^2 - 30X + 80 = 0,$$

d'où

$$X = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 240}}{3}. \quad (S.)$$

x et y sont donc imaginaires.

57. Soit x l'une des parties, l'autre sera $(1 - x)$, et l'on aura la relation

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{3}{7};$$

d'où

$$4x^2 + 6x - 3 = 0, \quad \text{et} \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12}}{4}.$$

La racine positive seule est acceptable, et l'on a

$$x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{4} = 0{,}3956 \quad (S.)$$

à 0,0001 près par défaut, et

$$1 - x = 0{,}6044 \ (S.)$$

à 0,0001 près par excès.

Construction géométrique. L'équation $4x^2 + 6x - 3 = 0$ peut s'écrire $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x\left(x + \frac{3}{2}\right)$; alors trouver la valeur de x revient donc à construire un rectangle équivalent à un carré dont le côté est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et dont la différence des côtés adjacents soit égale à $\frac{3}{2}$.

Pour cela, sur la ligne $AB = \frac{3}{2}$ comme diamètre, décrivons une circonférence et, à l'extrémité A de ce diamètre, menons la tangente AD égale au côté $\frac{\sqrt{3}}{2}$ du carré. Par le point D et le centre O, tirons la sécante DE; on aura

$$DE = x;$$

car $\overline{AD}^2 = DE \times DF$.

Pour avoir $1-x$, il suffira de porter sur la sécante DF, à partir du point D, une longueur DK égale à celle qu'on a prise pour unité, et EK sera l'autre partie cherchée.

Ainsi les deux parties sont DE et EK. (S.)

58. $x+y=10, \quad x=10-y, \quad (10-y)^2+y^2=370.$

Effectuant, il vient

$$3y^2-30y+63=0, \qquad y=\frac{15\pm\sqrt{15^2-3\times 63}}{3};$$

$$y=7, \ (S.) \qquad y'=x=3. \ (S.)$$

59. Appliquant un théorème connu

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

on a

$$x^2+xy+y^2=7;$$

or

$$y=x-1,$$

d'où

$$x^2+x(x-1)+(x-1)^2=7;$$

développant et réduisant

$$3x^2-3x-6=0;$$

simplifiant

$$x^2-x-2=0;$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2},$$

$$x'=\frac{1+3}{2}=2, \ (S.) \qquad y'=2-1=1, \ (S.)$$

$$x''=\frac{1-3}{2}=-1, \ (S.) \qquad y''=-1-1=-2. \ (S.)$$

Vérification.

1°	$2-1=1,$	2°	$-1+2=1,$
	$8-1=7.$		$-1+8=7.$

60. La première équation donne $x=y+4$; élevant au cube on trouve

$$x^3=y^3+12y^2+48y+64;$$

substituant dans la deuxième équation et faisant les réductions, on trouve

$$y^2 + 4y - 21 = 0;$$

résolvant

$$y = -2 \pm 5,$$

d'où

$$y' = 3, \quad (S.) \qquad y'' = -7. \quad (S.)$$

Les valeurs correspondantes de x sont alors

$$x' = 7, \quad (S.) \qquad x'' = -3. \quad (S.)$$

61. On élève la première équation au cube, et il vient

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x = 512,$$

ou

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 512,$$

d'où

$$xy = \frac{512 - (x^3 + y^3)}{3(x + y)},$$

ou, en vertu de la seconde,

$$xy = \frac{512 - 224}{8 \times 3} = \frac{288}{24} = 12.$$

Connaissant $x + y$ et xy, on a, pour déterminer x et y, l'équation du second degré suivante :

$$u^2 - 8u + 12 = 0,$$

d'où

$$u = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2;$$

donc

$$x = 6 \quad (S.) \quad \text{et} \quad y = 2. \quad (S.)$$

4° DÉCOMPOSITION D'UN TRINOME DU SECOND DEGRÉ ET DE DEGRÉ SUPÉRIEUR EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ.

62. On a

$$9x^2 - 9x + 2 = 9\left(x^2 - x + \frac{2}{9}\right);$$

résolvant l'équation $x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$, il vient

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6},$$

d'où

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \\ x'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

par conséquent

$$9x^2 - 9x + 2 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x - 2)(3x - 1). \text{ (S.)}$$

63. Pour décomposer en facteurs du premier degré le trinôme $4x^2 - 12x + 5$, écrivons-le ainsi : $4\left(x^2 - \frac{12}{4}x + \frac{5}{4}\right)$ et égalons à zéro le facteur qui est entre parenthèses ; nous avons

$$x^2 - \frac{12}{4}x + \frac{5}{4} = 0;$$

résolvons cette équation et il vient

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{2}{2}.$$

On a donc

$$x' = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1}{2}.$$

On aura donc, par un théorème connu,

$$4x^2 - 12x + 5 = 4\left(x^2 - \frac{12}{4}x + \frac{5}{4}\right) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right). \text{ (S.)}$$

64. 1° On peut ajouter et retrancher $\frac{p^2}{4}$, le trinôme devient

$$x^2 - px + q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4}$$

$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2.$$

Or la différence de deux carrés égale la somme des racines multipliée par leur différence; on aura donc

$$x = \left(x - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right). \quad \text{(S.)}$$

Le trinôme $x^2 - px + q$ est ainsi décomposé en deux facteurs du premier degré.

2° Par suite, l'équation $x^2 - px + q = 0$ devient

$$\left(x - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad x'' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad \text{(S.)}$$

Additionnant, on trouve $x' + x'' = p$, c'est-à-dire que la somme des racines de l'équation égale le coefficient de x en signe contraire. Faisant le produit, il vient

$$x' \times x'' = q, \quad \text{(S.)}$$

c'est-à-dire que le produit des racines de l'équation égale la quantité connue, avec son signe dans le premier membre.

65. $$\begin{aligned} -2x^2 - 3x + 5 &= -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) \\ &= -2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right) - \frac{}{16} + \frac{5}{2}\right] \\ &= -2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{5}{2}}\right)^2\right] \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{5}{2}}\right) \\ &\quad \times \left(x + \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{5}{2}}\right). \end{aligned}$$

Égalant le trinôme à 0, on a pour les racines

$$x' = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{5}{2}} = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = 1,$$

$$x'' = -\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{5}{2}} = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{5}{2}.$$

Le trinôme peut donc se mettre sous la forme

$$-2(x - x')(x - x'') = -2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right). \quad \text{(S.)}$$

66. L'équation $x^4 - 13x^2 + 16 = 0$ donne

$$x^2 = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{(13)^2 - 4 + 16}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{1}{2}(13 \pm \sqrt{105}).$$

Les deux valeurs de x^2 ainsi obtenues sont positives; les quatre valeurs de x sont donc réelles, et l'on aura

$$x_1 = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{105}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{13 + \sqrt{105}}{2}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{13 - \sqrt{105}}{2}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{13 - \sqrt{105}}{2}}.$$

Il en résulte

$$x^4 - 13x^2 + 16 = \left(x - \sqrt{\frac{13 + \sqrt{105}}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{13 + \sqrt{105}}{2}}\right)$$
$$\times \left(x - \sqrt{\frac{13 - \sqrt{105}}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{13 - \sqrt{105}}{2}}\right).$$

(S.)

On peut d'ailleurs obtenir $\sqrt{105}$ avec toute l'approximation que l'on veut.

5° VARIATION D'UN TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

67. Le trinôme proposé peut se mettre sous la forme

$$(x-3)^2+6.$$

Pour toute valeur réelle de x, ce trinôme est positif, comme étant une somme de deux carrés. Lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+3$, le trinôme décroît d'une manière continue de $+\infty$ à $+6$. Pour $x=3$, le trinôme se réduit à 6. Enfin, x continuant à croître de $+3$ à $+\infty$, le trinôme croît d'une manière continue de $+6$ à $+\infty$.

D'après la définition analytique du minimum, $x=+3$ est la valeur de la variable qui fait acquérir au trinôme sa valeur minimum. Quant au maximum, il n'existe pas, à proprement parler.

68. Posons

$$\frac{2x^2+5x-3}{6x^2-x-2}=y.$$

Si nous décomposons séparément le numérateur et le dénominateur en facteurs du premier degré, nous voyons que

$$2x^2+5x-3=(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

et

$$6x^2-x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right);$$

donc

$$y=\frac{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}.$$

Cela posé, nous voyons que, si l'on fait varier x

de $-\infty$ à -3, y est positif;

de -3 à $-\frac{1}{2}$, y est négatif;

de $-\frac{1}{2}$ à $+\frac{1}{2}$, y est positif;

de $+\frac{1}{2}$ à $+\frac{2}{3}$, y est négatif;

de $+\frac{2}{3}$ à $+\infty$, y est positif.

Il est facile, d'après cela, de construire une courbe qui représente graphiquement les variations de la fonction y; mais cette étude intéressante sort de nos limites. De plus, on peut reconnaître, soit par cette construction, soit par le procédé élémentaire, que la fonction ne passe ni par un maximum ni par un minimum.

On voit de plus que y est nul pour $x = -3$ et $x = \frac{1}{2}$, et que y est infini pour $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$.

6° PROPORTIONS ET PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE ET PAR QUOTIENT.

69. La formule qui donne la somme S de n termes d'une progression arithmétique en fonction du premier terme a et de la raison r est

$$S = \frac{[2a + r(n-1)]n}{2}.$$

Résolvant par rapport à n,

$$n = \frac{-(2a-r) \pm \sqrt{(2a-r)^2 + 8rS}}{2r}.$$

La solution négative est évidemment à rejeter. Remplaçant dans l'autre a par 2,5, r par 0,3 et S par 1020, on trouve

$$n = 75. \quad (S.)$$

70. Soient a la première partie et r la raison, on aura

$$(1) \qquad a + ar + ar^2 = 195,$$

$$(2) \qquad ar^2 - a = 120.$$

On en conclut

$$2a + ar = 75,$$

$$a = \frac{75}{2 + r},$$

$$75(r^2 - 1) = 120(2 + r),$$

d'où

$$r' = 3,$$

$$r'' = -1,4.$$

Les deux systèmes de parties sont donc

$$15, \quad 45, \quad 135; \quad (S.)$$

$$125, \quad 175, \quad 245. \quad (S.)$$

71. On sait que, quand on a n moyens à insérer entre deux nombres a et l, la raison r est donnée par la formule

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{l}{a}} = \sqrt[5]{\frac{39815}{17524}}.$$

Les quatre moyens sont donc ar, ar^2, ar^3, ar^4, c'est-à-dire

$$20,650; \quad 24,333; \quad 28,672; \quad 38,788. \quad (S.)$$

72. La raison de la progression géométrique étant q, celle de la progression arithmétique r, nous aurons

$$q = \sqrt{\frac{l}{a}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = 1,77,$$

$$r = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}.$$

Les deux progressions sont donc

$$\div\ 0 \,.\, 0,25 \,.\, 0,50 \,.\, 0,75 \,.\, 1; \quad (S.)$$

$$\div\div\ 1 \,.\, 1,77 : 3,13 : 5,54 : 10. \quad (S.)$$

73. Soit x le premier terme, y le dernier, nous aurons

(1) $$xy = (x-4)(y+3),$$

(2) $$x^2 + (x-4)^2 + (y+3)^2 + y^2 = 62,5.$$

La relation (1) peut s'écrire

$$3x - 4y = 12.$$

Développant (2), il vient

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y = 37,5.$$

Je tire x de la relation (1)

$$x = \frac{12+4y}{3}.$$

Je substitue dans (2), il vient

$$50y^2 + 150y - 337,5 = 0,$$

$$y = -\frac{75 \pm \sqrt{5625 + 16875}}{50}.$$

Je néglige la racine négative inadmissible, puisqu'il s'agit de nombres. Il vient

$$y = \frac{-75+150}{50} = 1,5;$$

donc

$$x = \frac{12+6}{3} = 6.$$

Les nombres seront donc

$$6;\ 2;\ 4,5;\ 1,5. \quad \text{(S.)}$$

74. La formule $S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2}$ donne

$$10877 = \frac{[10 + (n-1)4]n}{2},$$

ce qui donne l'équation

$$2n^2 + 3n - 10877 = 0,$$

d'où

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 87016}}{4},$$

$$n' = \frac{-3+295}{4} = 73. \quad \text{(S.)}$$

La racine n'' n'est pas admissible.

75. La somme des n premiers nombres impairs est représentée par la suite

$$1+3+5+\ldots+(2n-1);$$

si l'on fait usage de la formule connue pour déterminer la somme des termes de cette progression, on trouve

$$S=\frac{(1+2n-1)\,n}{2}=n^2. \quad (S.) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

76. Le terme de rang x de cette progression a pour expression

$$2+(x-1)\,3=3x-1,$$

de sorte que la somme des x premiers termes est représentée par

$$\frac{x\,(3x+1)}{2};$$

égalant ce résultat à 876, on obtient une équation du second degré, dont les racines sont

$$x=\frac{-1\pm 145}{3}.$$

La racine positive 48 (S.) est seule admissible et répond à la question.

77. A B M

Le mobile qui part du point A aura, au bout de x minutes, parcouru un espace AM représenté par

$$AM=1+3+5+\ldots+2x-1=x^2.$$

Le mobile qui part du point B aura, au bout de x minutes, parcouru un espace BM représenté par

$$BM=3+4+5+\ldots+(2+x)=\frac{(x+5)\,x}{2}.$$

L'équation du problème est évidemment

$$AM=AB+BM,$$

et par suite

$$x^2=\frac{x\,(x+5)}{2}+75,$$

ou

$$(1) \qquad x^2-5x-150=0,$$

équations dont les racines sont

$$x' = 15, \quad (S) \qquad x'' = -10.$$

La racine positive $x' = 15$ convient bien à l'énoncé, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. Quant à la racine négative $x'' = -10$, elle ne paraît pas susceptible d'être interprétée ici. En effet, si l'on change x en $-x$ dans (1), l'équation résultante admet bien pour racine positive $x = 10$; mais x représente un nombre de minutes, et l'espace correspondant $AM = x^2$ ne change pas de signe avec x, de sorte qu'il n'y a pas lieu de considérer un point à gauche de A.

78. Il faut prendre 48 termes (solution identique à celle du n° 74).

79. Soit x le plus petit côté du triangle donné, les deux autres côtés seront $x + a$, $x + 2a$, et, comme le triangle est rectangle, on aura

$$(x + 2a)^2 = (x + a)^2 + x^2,$$

ou bien

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = x^2 + 2ax + a^2 + x^2,$$

ou

$$x^2 - 2ax - 3a^2 = 0,$$

d'où

$$x = a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = a \pm 2a.$$

La seconde valeur ne convient pas, et l'on a $x = 3a$.
Les trois côtés sont donc $3a$, $4a$, $5a$. (S.)

80. La raison de la progression cherchée a pour valeur

$$r = \sqrt[6]{\frac{4826809}{1}} = \sqrt[3]{\sqrt{4826809}} = \sqrt[3]{2197} = 13$$

La progression est donc

$$1,\ 13,\ 13^2,\ 13^3,\ 13^4,\ 13^5,\ 13^6 = 4826809. \quad (S.)$$

81.
$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \quad (S.)$$

82 Il est aisé de vérifier que la progression donnée est une progression arithmétique, dont la raison est $-\frac{1}{n}$, et que le $n^{\text{ième}}$ terme est zéro. La somme des termes étant égale à la demi-somme des termes extrêmes multipliée par le nombre de termes, on a

$$S = \frac{n-1}{2n} \times n = \frac{n-1}{2}. \quad \text{(S.)}$$

83. Soit a le premier terme, l le dernier, r la raison. Une progression étant déterminée par son premier terme et sa raison, cherchons les relations qui unissent ces deux quantités. On sait que la somme des n termes d'une progression arithmétique est donnée par l'égalité $S = \frac{(a+l)n}{2}$.

On a donc, d'après l'énoncé,

$$(1) \qquad \frac{(a+l)n}{2} = (n+1)\frac{l}{2},$$

ou bien

$$an + l;$$

mais on sait aussi que

$$l = a + (n-1)r;$$

reportant cette valeur dans (1), il vient

$$an = a + (n-1)r,$$

ou

$$a(n-1) = (n-1)r,$$

d'où

$$r = a;$$

donc la raison est égale au premier terme, et la progression s'écrira

$$\div\ a,\ 2a,\ 3a, \ldots, na. \quad \text{(S.)}$$

84. En appliquant la formule générale limite $S = \frac{a}{1-q}$ à l'exemple proposé, il vient

$$\lim S = \frac{0{,}72}{1-0{,}01} = \frac{0{,}72}{0{,}99} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}. \quad \text{(S)}$$

C'est la fraction ordinaire génératrice de la périodique simple 0,727272....

7° INTÉRÊTS COMPOSÉS ET ANNUITÉS.

85. Le marché embrasse une période de $4n$ années. Évaluons la somme que vaudraient les capitaux S placés chaque année pendant n années, augmentés de leurs intérêts composés pendant le reste du temps. Évaluons de même la valeur qu'auraient acquise au bout du temps du marché, augmentées de leurs intérêts composés, les annuités payées, et égalons ces deux valeurs : c'est la condition d'équité de la convention ; nous en tirerons A. Appelons r le taux d'intérêt de 1 franc pour un an.

La première somme S pourrait rester placée pendant $4n$ années et vaudrait au bout de ce temps $S(1+r)^{4n}$; la deuxième vaudrait $S(1+r)^{4n-1}$; la dernière somme S pourrait porter intérêt pendant $(3n+1)$ années et vaudrait après $4n$ années $S(1+r)^{3n+1}$. Ces diverses valeurs forment une progression géométrique de raison $(1+r)$. Évaluons la somme d'après la formule

$$S=\frac{lq-a}{q-1},$$

nous aurons

$$\frac{S(1+r)^{4n+1}-S(1+r)^{3n+1}}{r}=S(1+r)^{3n+1}\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right].$$

D'autre part, la première somme A donnée pourrait rester placée pendant $(2n-1)$ années, et au bout de ce temps vaudrait $A(1+r)^{2n-1}$; la dernière n'a que sa valeur A, puisqu'on la remet à la fin de la période du marché.

La somme évaluée de même est

$$\frac{A(1+r)^{2n}-A}{r}=A\left[\frac{(1+r)^{2n}-1}{r}\right].$$

Égalant, nous aurons

$$S(1+r)^{3n+1}\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]=A\left[\frac{(1+r)^{2n}-1}{r}\right]$$

$$=A\left\{\frac{[(1+r)^n-1][(1+r)^n+1]}{r}\right\},$$

$$S(1+r)^{3n+1}=A[(1+r)^n+1],$$

$$A=S\frac{(1+r)^{3n+1}}{(1+r)^n+1}. \quad (S.)$$

Quant à la condition pour que A fût égal à S, on l'aura en écrivant que le coefficient de S dans le second membre est l'unité

$$(1+r)^{3n+1}=(1+r)^n+1,$$

équation d'où il faudrait tirer n. C'est une équation transcendante qui n'est pas résoluble par les moyens élémentaires.

86. L'intérêt de 1 franc pendant un mois est de $\frac{5,50}{1200}$; je l'appelle i. Puisque l'emprunteur rend 300 francs dans six mois et qu'il prélève d'avance les intérêts sur la somme qu'il verse, il faut que la première somme donnée actuellement par le prêteur, augmentée de ses intérêts, vaille 300 francs dans 6 mois. Soit x cette première portion du prêt, nous aurons

$$x(1+6i)=300^{fr},$$

$$x=\frac{300^{fr}}{1+6i}.$$

Ainsi 300^{fr} dans 6 mois ne valent actuellement que $\frac{300}{1+6i}$,

et de même 300^{fr} dans 8 — — — $\frac{300}{1+8i}$,

— 300^{fr} — 10 — — — $\frac{300}{1+10i}$,

— 100^{fr} — 12 — — — $\frac{100}{1+12i}$.

Le prêteur ne devra donc donner actuellement que

$$\frac{300}{1+6i}+\frac{300}{1+8i}+\frac{300}{1+10i}+\frac{100}{1+12i}=963^{fr}. \quad (S.)$$

87. 2000 francs payés chaque année pendant 12 ans peuvent être remplacés par une somme unique

$$2000 \times \frac{1,05^{12} - 1}{0,05}$$

(voir la formule des intérêts composés), payée au bout des 12 ans ou par une somme

$$2000 \times \frac{1.05^{12} - 1}{0,05} \times \frac{1}{1,05^{12}}$$

payée actuellement

La somme qui équivaudrait à celle-là, payée dans 4 ans, sera donc

$$2000 \times \frac{1,05^{12} - 1}{0,05} \times \frac{1,05^{4}}{1,05^{12}}$$

$$= 2000 \times \frac{1,05^{12} - 1}{0,05 \times 1,05^{4}} = 21546^{fr},50. \quad (S.)$$

88. L'intérêt de 1 franc pour 1 an est $0^{fr},04$; par conséquent 3625 francs placés à intérêt composé deviennent au bout de 8 ans

$$3625 = (1 + 0,04)^{8} = 4961^{fr};$$

3625 francs ont donc rapporté

$$4961 - 3625 = 1336^{fr}. \quad (S)$$

89. Soient A le capital augmenté de ses intérêts, a le capital placé, r le taux de l'intérêt pour 1 franc, et n le nombre d'années :

$$A = a(1 + r)^{n},$$

d'où

$$\log(1 + r) = \frac{\log A - \log a}{n},$$

$$1 + r = 1^{fr},044,$$

$$r = 0^{fr},044;$$

donc 100 francs dans un an rapportent $4^{fr},40$. (S.)

90. La formule des intérêts composés est, en conservant les notations du précédent problème,

$$A = (1 + r)^{n}.$$

Ici n est l'inconnue; on a

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} = \frac{\log 12328 - \log 7872}{\log(1,05)} = 9 \text{ ans.} \quad (S.)$$

91. Soit x cette somme actuelle. On aura, en vertu de la formule des annuités,

$$x(1,05)^6 = \frac{325(1,05)^6 - 1}{0,05},$$

d'où

$$x = \frac{325(1,05)^6 - 1}{0,05 \times (1,05)^6}.$$

Je calcule $(1,05)^6$,

$$\log(1,05) = 6 \log 1,05 = 0,1271358,$$

$$(1,05)^6 = 1,3401,$$

d'où

$$x = \frac{325 \times 0,3401}{0,05 \times 1,3401} = \frac{110,500}{0,06700} = 1649^{fr}. \quad (S.)$$

92. *Réponse :* $a = \dfrac{A[(1,05)^5 - 0,5] \times 0,05}{(1,05)^5 - 1} = 0,14A.$ (S.)

93. Il faut écrire que, dans 10 années, il y aura égalité entre les versements totaux résultant des deux modes de payement. Or les versements du premier mode fournissent au bout de 10 ans la somme

$$a(1+r)^9 + a(1+r)^8 + \ldots + a(1+r) + a$$
$$= \frac{a[(1+r)^{10} - 1]}{r}.$$

Les 5 versements du deuxième mode donnent, à la même époque,

$$x(1+r)^9 + x(1+r)^8 + x(1+r)^7 + x(1+r)^6 + x(1+r)^5,$$

c'est-à-dire

$$x\left[\frac{(1+r)^{10} - (1+r)^5}{r}\right] \quad \text{ou} \quad x(1+r)^5\left[\frac{(1+r)^5 - 1}{r}\right];$$

de là l'égalité

$$x(1+r)^5\left[\frac{(1+r)^5 - 1}{r}\right] = a\left[\frac{(1+r)^{10} - 1}{r}\right],$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{a}{(1+r)^5}\left[\frac{(1+r)^{10}-1}{(1+r)^5-1}\right] = \frac{a}{(1+r)^5}[(1+r)^5+1],$$

ou encore

$$x = a + \frac{a}{(1+r)^5} = a + \frac{a}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^5}. \quad \text{(S.)}$$

8° CALCULS PAR LOGARITHMES.

94.
$$\log 128 = 2{,}1072100,$$
$$\log 9657 = 3{,}9848122,$$
$$\log\frac{128}{9657} = \bar{2}{,}1223678.$$

Ajoutant et retranchant 2 à la caractéristique

$$\log\frac{128}{9657} = -4 + 2{,}1223678,$$

$$\log\sqrt[4]{\frac{128}{9657}} = \frac{1}{4}\log\frac{128}{9657} = \bar{1} + 0{,}5305919,$$

$$\sqrt[4]{\frac{128}{9657}} = 0{,}339306. \quad \text{(S.)}$$

95.
$$\log 23 = 1{,}3617278,$$
$$\log 75586 = 4{,}8608329,$$

$$\log\frac{23}{75586} = \bar{4}{,}5008749 = \bar{6} + 2{,}5008749;$$

donc

$$\log\sqrt[3]{\frac{23}{75586}} = \frac{1}{3}\log\frac{23}{75586} = \bar{2}{,}8336249,$$

et

$$\sqrt[3]{\frac{23}{75586}} = 0{,}068175. \quad \text{(S.)}$$

96
$$\log x = \left\{\begin{array}{l} \quad\quad \log 31{,}071, \\ + \quad \log 23{,}372, \\ + \quad \log\ 7{,}259, \\ + \mathrm{C}^t \log\ 0{,}515, \\ + \mathrm{C}^t \log\ 0{,}719, \\ + \mathrm{C}^t \log\ 0{,}021, \\ - 30, \end{array}\right\}$$
$$x = 519900. \quad (\mathrm{S})$$

97
$$\log x = \frac{1}{3}(\log 23 - \log 72586),$$
$$\log 23 = 1{,}3617278$$
$$-\log 72586 = \overline{5}{,}1391471$$
$$\overline{4}{,}5008749.$$

Pour prendre le tiers de ce résultat, j'ajoute $\overline{2}$ à la caractéristique et $+2$ à la partie décimale, je prends ensuite le tiers du binôme suivant
$$-6 + 2{,}5008749,$$
et j'obtiens
$$\log x = \overline{2}{,}8336247,$$
$$x = 0{,}06812266. \quad (\mathrm{S.})$$

98. Si l'on désigne la base par x, on a, dans le système actuel,
$$l'x = 1,\ l'3 = 1000;$$
mais, dans le système vulgaire, on a
$$\log 1000 = 3;$$
donc, en vertu du principe connu,
$$\log x = \frac{3}{1000}. \quad (\mathrm{S.})$$

99. D'après la définition de la base d'un système de logarithmes, nous avons, en appelant x la base cherchée,
$$x^{10} = 9.$$
Prenant les logarithmes, il vient
$$\log x = \frac{\log 9}{10}, \quad \text{d'où} \quad x = 1{,}24573. \quad (\mathrm{S.})$$

TRIGONOMÉTRIE.

1° ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION.

1. Les formules qui donnent $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\sin a$ sont

$$\sin\frac{1}{2}a = \pm\frac{\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\frac{\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}}{2}.$$

Appliquons-les dans le cas actuel, où $\sin a = \frac{1}{4}$, et nous aurons

$$\sin\frac{1}{2}a = \pm\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}}{4},$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\frac{\sqrt{5} \mp \sqrt{3}}{4},$$

ce qui donne

$$\sin\frac{1}{2}a_1 = \pm\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4} = 0{,}99203, \quad (S.)$$

$$\cos\frac{1}{2}a_1 = \pm\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4} = 0{,}12600, \quad (S.)$$

$$\sin\frac{1}{2}a_2 = \pm\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4} = 0{,}12600, \quad (S.)$$

$$\cos\frac{1}{2}a_2 = \pm\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4} = 0{,}99203, \quad (S.)$$

les valeurs $\sin a_1$ et $\sin a_2$ ayant le double signe correspondant au double signe placé devant les valeurs des cosinus.

2. On sait que

$$\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \cos \frac{1}{2}(P-Q);$$

on aura donc

$$\sin X = 2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \cos \frac{1}{2}(P-Q),$$

formule qui donne

$$X = 49^\circ\, 45'\, 15'',4. \quad (S.)$$

3. Nous devons avoir

(1) $$\sin x + \cos x = a;$$

d'ailleurs on sait que

(2) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Élevons (1) au carré, retranchons-en (2), nous aurons

$$2 \sin x \cos x = a^2 - 1.$$

Sin x et cos x sont donc les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - aX + \frac{a^2-1}{2} = 0.$$

Comme x est compris entre 0° et 45°, son cosinus est plus grand que son sinus, et l'on aura

$$\cos x = 0,575 + 0,411552 = 0,986552,$$
$$\sin x = 0,575 - 0,411552 = 0,163448.$$

En retranchant la valeur de log cos x et repassant à l'arc, on trouve

$$x = 9^\circ\, 24'\, 25'',4. \quad (S.)$$

4. Ce problème peut se résoudre :

1° Par la *géométrie*.

Le sinus de l'angle de 30° est la moitié du côté de l'hexagone régulier ou $\frac{1}{2}$.

Le sinus de l'angle de 15° est la moitié du côté du dodécagone régulier ou $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Le cosinus du même angle sera l'apothème du dodécagone ou $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2° Par la *trigonométrie*.

On connaît les formules

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\sin a,$$

$$\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}=1,$$

d'où l'on tire

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin a}-\sqrt{1-\sin a}}{2},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin a}+\sqrt{1-\sin a}}{2}.$$

Si l'on fait $a=30°$, $\frac{a}{2}=15°$, il vient

$$\sin 15°=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \text{(S.)}$$

$$\cos 15°=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \quad \text{(S.)}$$

5. On a $$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{2}-1;$$

cherchons tang A en fonction de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$. Une formule connue donne

$$\operatorname{tang} 2A=\frac{2\operatorname{tang} A}{1-\operatorname{tang}^2 A};$$

en y remplaçant A par $\frac{1}{2}A$, on trouve

$$\operatorname{tang} A=\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}A}.$$

Mettant à la place de $\tang \frac{1}{2} A$ sa valeur $\sqrt{2} - 1$, on trouve

$$\tang A = \frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2} - 2} = 1 ;$$

donc

$$\tang A = 1, \quad (S.)$$

et

$$A = 45^\circ. \quad (S.)$$

6. De la formule connue

$$\tang (a + b) = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a \tang b},$$

on tire, en posant $b = a$,

$$\tang 2a = \frac{2 \tang a}{1 - \tang^2 a},$$

et en remplaçant dans celle-ci a par $\frac{a}{2}$

$$\tang a = \frac{2 \tang \frac{a}{2}}{1 - \tang^2 \frac{a}{2}}.$$

En posant $\tang \frac{a}{2} = m$, on trouve

$$\tang a = \frac{2m}{1 - m^2}.$$

Des formules connues donnent

$$\sin a = \frac{\tang a}{\sqrt{1 + \tang^2 a}} \quad \text{et} \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 a}},$$

ou bien, en remplaçant $\tang a$ par $\frac{2m}{1 - m^2}$,

$$\sin a = \frac{2m}{1 + m^2} \quad \text{et} \quad \cos a = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Si l'on remplace m par $\sqrt{2}-1$, ces trois valeurs deviennent, après les simplifications,

$$\operatorname{tang} a = 1, \qquad (S.)$$

$$\sin a = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad (S.)$$

$$\cos a = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad (S.)$$

$$a = 45^\circ. \qquad (S.)$$

7. De la formule connue

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$$

on tire, en posant $b = a$,

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a},$$

et en faisant dans cette dernière $a = \frac{a}{2}$, on a

$$\operatorname{tang} a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{a}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a}}{\operatorname{tang} a}.$$

Si l'on fait $a = 45^\circ$, on aura

$$\operatorname{tang} a = 1$$

et

$$\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2} = \operatorname{tang} 22^\circ 30' = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1}.$$

On doit prendre le radical avec le signe $+$, puisque tang $22^\circ 30'$ est positive; donc

$$\operatorname{tang} 22^\circ 30' = -1 + \sqrt{2} = 0{,}414. \quad (S.)$$

8. Puisque $\cot a = \frac{4}{3}$, on aura

$$\operatorname{tang} a = \frac{3}{4};$$

alors

$$\sin a = \frac{\operatorname{tang} a}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 a}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 a}} = \frac{4}{5};$$

mais on sait que

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \frac{24}{25};$$

d'ailleurs

$$\operatorname{coséc} 2a = \frac{1}{\sin 2a} = \frac{25}{24}. \quad (S.)$$

9. On a

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1, \quad 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

ajoutant et retranchant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Extrayant les racines carrées et remarquant que

$$\cos 15^\circ > \sin 15^\circ > 0,$$

on a

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 15^\circ - \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1), \quad (S.)$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1). \quad (S.)$$

10. On a les formules

$$(1) \qquad \sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},$$

$$(2) \qquad \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

d'où

$$\tang\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}};$$

Mais, puisque $a = 45$ degrés,

$$\cos a = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

et alors

$$\tang\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1. \text{ (S.)}$$

11. Appelons x l'angle considéré. L'énoncé donne

$$\tang x = \frac{4}{3}.$$

La valeur de $\tang x$ étant supérieure à 1, l'angle x est plus grand que 45 degrés. Donc $2x$ est plus grand que 90 degrés, et son extrémité se trouve dans le deuxième quadrant. Cet arc $2x$ a donc un sinus positif, une tangente et un cosinus négatifs. Je dis que chacune de ces trois lignes n'a qu'une seule valeur. En effet, à la valeur $\tang x = \frac{4}{3}$ correspond non-seulement l'arc x, mais encore l'arc $\pi + x$ qui se termine dans le troisième quadrant, et d'une manière générale l'arc $n\pi + x$ (n étant pair ou impair, positif ou négatif). Le double de cet arc est $2n\pi + 2x$. Cette valeur ne diffère de $2x$ que d'un nombre entier de circonférences. Donc les valeurs des trois lignes que nous cherchons

ne peuvent être que celles qui conviennent à l'arc $2x$ ayant son extrémité dans le deuxième quadrant.

Cela posé, on sait qu'on a

$$\text{séc}^2 x = 1 + \text{tang}^2 x = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9},$$

d'où

$$\text{séc}\, x = \pm \frac{5}{3}.$$

Mais

$$\cos x = \frac{1}{\text{séc}\, x} = \pm \frac{3}{5}.$$

Enfin

$$\sin x = \text{tang}\, x \cos x = \frac{4}{3} \times \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \pm \frac{4}{5}.$$

Appliquons maintenant les formules

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

il vient

$$\sin 2x = 2 \times \left(\pm \frac{4}{5}\right)\left(\pm \frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}, \quad (\text{S.})$$

$$\cos 2x = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}. \quad (\text{S.})$$

Enfin

$$\text{tang}\, 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{24}{7}. \quad (\text{S.})$$

Cette dernière valeur aurait pu être obtenue immédiatement par la formule

$$\text{tang}\, 2x = \frac{2\, \text{tang}\, x}{1 - \text{tang}^2 x}.$$

12. On a

$$(1) \qquad \text{tang}\, a = \frac{2\, \text{tang}\, \frac{a}{2}}{1 - \text{tang}^2 \frac{a}{2}}, \quad (\text{S.})$$

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2\, \text{tang}\, \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{2\, \text{tang}\, \frac{a}{2}}{1 + \text{tang}^2 \frac{a}{2}}, \quad (\text{S.})$$

$$\cos a = \frac{\sin a}{\tang a} = \frac{2\tang\frac{a}{2}}{1+\tang^2\frac{a}{2}} \times \frac{1-\tang^2\frac{a}{2}}{2\tang\frac{a}{2}} = \frac{1-\tang^2\frac{a}{2}}{1+\tang^2\frac{a}{2}}. \quad (S.)$$

Il est facile d'étudier *à priori* les solutions que l'on doit obtenir.

En effet, donner $\tang\frac{a}{2}$, c'est donner la tangente de tous les arcs compris dans la formule $K\pi+\alpha$, α étant le plus petit des arcs positifs ayant la tangente dont il s'agit. Les arcs doubles, c'est-à-dire les arcs a, sont donc compris dans la formule $2K\pi+2\alpha$, et leurs lignes trigonométriques sont celles de l'arc 2α. Il ne doit donc y avoir qu'une seule valeur pour chaque ligne trigonométrique de a, ainsi que nous l'avons trouvé.

13. On peut calculer $\sin 15°$ et $\cos 15°$ soit en fonction de $\sin 30°$, soit en fonction de $\cos 30°$. Nous allons employer la première méthode, parce qu'elle conduit à des expressions plus faciles à calculer.

On sait que

$$\sin 30° = \frac{1}{2};$$

on a

$$\sin^2 15° + \cos^2 15° = 1,$$

$$2\sin 15° \cos 15° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

ajoutant

$$(\sin 15° + \cos 15°) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

d'où

(1) $$\sin 15° + \cos 15° = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

retranchant

$$(\cos 15° - \sin 15°)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

d'où

(2) $$\cos 15° - \sin 15° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous prenons $\cos 15° - \sin 15°$ et non $\sin 15° - \cos 15°$, parce que, pour l'arc de 15 degrés, le cosinus est plus grand que le sinus.

Ajoutant et retranchant successivement (1) et (2), il vient

$$2\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$$

$$2\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},$$

d'où enfin

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 0{,}9659, \quad (S.)$$

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}2588. \quad (S.)$$

Remarque. Par $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on trouverait

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \quad (S.) \qquad \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \quad (S.)$$

et l'on peut vérifier que ces valeurs sont identiques aux précédentes.

2° FORMULES DE RELATIONS.

14. L'arc de 75 degrés se décompose en 45 degrés et 30 degrés. Nous aurons donc

$$\sin 75° = \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30°,$$
$$\cos 75° = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°;$$

or le sinus et le cosinus de 45 degrés sont tous deux égaux à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; d'autre part,

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

nous aurons donc

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) = 0{,}96592, \quad (S.)$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = 0{,}25882. \quad (S.)$$

15. Le plus petit angle ayant pour cotangente l'unité est 45 degrés, dont le sinus est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; l'arc de 125 degrés a aussi pour cotangente 1, son sinus est égal et de signe contraire au précédent, soit $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ce résultat peut se déduire du calcul

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a},$$

$$\cot^2 a = 1 = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1-\sin^2 a}{\sin^2 a},$$

d'où

$$2\sin^2 a = 1,$$

$$\sin a = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707. \quad (S.)$$

16. Étant donné

$$\sin x = 2\sin a,$$

nous avons

$$\log\sin x = \log 2 + \log\sin a,$$

d'où

$$x = 37^\circ 11' 58'',6. \quad (S.)$$

17. Soit a l'angle inconnu, nous aurons

$$\cos^2\frac{1}{2}a = \frac{1+\cos a}{2} = \frac{1-0{,}358}{2},$$

$$\cos\frac{1}{2}a = 0{,}566. \quad (S.)$$

Les tables montrent que

$$\log 0{,}358 + 10 = 9{,}5538830,$$

correspondant à

$$69^\circ 1' 29'',6,$$

dont le supplément est

$$110^\circ 58' 30'',4;$$

d'ailleurs

$$\log 0,566 + 10 = 9,7528164,$$

correspondant à

$$55^\circ 31' 41'',6,$$

au lieu de

$$55^\circ 29' 15'',2.$$

18. Les formules donnent

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \pm 0,96369, \quad (S.$$

$$\sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \pm 0,26700. \quad (S.)$$

19. On a

$$\tang a + \tang b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos}{\cos a \cos b},$$

$$= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b},$$

$$= \frac{2\sin(a+b)}{2\cos a \cos b}.$$

Au dénominateur, nous pouvons ajouter et retrancher la même quantité $\sin a \sin b$, ce qui donnera

$$2\cos a \cos b + \sin a \sin b - \sin a \sin b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

ce qui conduit à la formule qu'on voulait démontrer

$$\tang a + \tang b = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}. \quad (S.)$$

20. En appelant x le plus petit angle dont le cosinus soit $+0,548$, les angles compris entre 0° et 1000°, qui ont même cosinus, seront

$$x = 56^\circ 46' 12'', \quad (S.)$$
$$360 - x = 303^\circ 13' 48'', \quad (S.)$$
$$360 + x = 416^\circ 46' 12'', \quad (S.)$$
$$2 \times 360 - x = 663^\circ 13' 48'', \quad (S.)$$
$$2 \times 360 + x = 776^\circ 46' 12''. \quad (S.)$$

21. Désignons par x l'angle donné, nous aurons

$$\sin x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = +0{,}75823, \quad (S.)$$

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} \ldots = -0{,}652, \quad (S.)$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ldots\ldots\ldots\ldots = -1{,}163, \quad (S.)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \ldots\ldots\ldots\ldots = -0{,}860, \quad (S.)$$

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x} \ldots\ldots\ldots\ldots = -1{,}534. \quad (S.)$$

$$\text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x} \ldots\ldots\ldots\ldots = 1{,}319. \quad (S.)$$

22. Il n'y a qu'à développer

$$\sin \frac{1}{2}(p-q),$$

d'après la formule

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q);$$

on résout ensuite par rapport à $\cos x$. (S.)

23. Il s'agit d'exprimer $\sin a$ en fonction de $\operatorname{tang} \frac{a}{2}$. Or on a

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \operatorname{tang} \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2}.$$

Remplaçant $\cos^2 \frac{a}{2}$ par sa valeur en $\operatorname{tang} \frac{a}{2}$, il vient

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{ta} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{a}{2}}.$$

Ici, $\operatorname{tang} \frac{a}{2} = 2 - \sqrt{3}$. On trouve alors

$$\sin a = \frac{1}{2}. \quad (S.)$$

On aurait d'ailleurs pu trouver directement, par les tables,

l'angle $\frac{a}{2}$ dont la tangente est $2-\sqrt{3}$; cet angle est de 15 degrés; donc

$$\sin a = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad (S.)$$

24. On a dans les deux triangles rectangles AOB, AOC

$$AB = AO \operatorname{tang} 30^\circ \quad \text{et} \quad AC = AO \operatorname{tang} 60^\circ.$$

On en déduit

$$BC = AC - AB = AO(\operatorname{tang} 60^\circ - \operatorname{tang} 30^\circ);$$

or

$$\operatorname{tang} 60^\circ - \operatorname{tang} 30^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} - \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ \cos 30^\circ}$$

ou

$$\operatorname{tang} 60^\circ - \operatorname{tang} 30^\circ = \frac{\sin(60^\circ - 30^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 30^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ \cos 30^\circ};$$

donc

$$BC = \frac{AO \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ \cos 30^\circ}.$$

On en conclut

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AO \sin 30}{\cos 60^\circ \cos 30^\circ} \frac{\cos 30^\circ}{AO \sin 30^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Donc BC est double de AB. (S.)

25. Pour avoir $\operatorname{tang} \frac{A}{2}$ en fonction de $\operatorname{tang} A$, on prend la formule connue

$$\operatorname{tang}(A+B) = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}{1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}$$

et l'on y fait $B = A$; on trouve

$$\operatorname{tang} 2A = \frac{2 \operatorname{tang} A}{1 - \operatorname{tang}^2 A}.$$

Dans celle-ci on remplace A par $\frac{A}{2}$ et l'on a

$$\operatorname{tang} A = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{A}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}};$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} + \frac{2}{\operatorname{tang} A} \operatorname{tang} \frac{A}{2} - 1 = 0.$$

Résolvant cette équation, on trouve

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 A}}{\operatorname{tang} A}.$$

Si l'angle A vaut 60 degrés, cette formule devient

$$\operatorname{tang} 30^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 60^\circ}}{\operatorname{tang} 60^\circ};$$

or

$$\operatorname{tang} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Substituant, et prenant la valeur positive du radical, on a

$$\operatorname{tang} 30^\circ = \frac{-1 + \sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \frac{-1 + \sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{-1+2}{\sqrt{3}},$$

ou enfin

$$\operatorname{tang} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (S.)$$

26. $$\operatorname{tang} x = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2n}{1-n^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

d'où

$$x = 45^\circ. \quad (S.)$$

27. Vérifier l'égalité

$$\operatorname{tang}(45+a)-\operatorname{tang}(45-a)=2\operatorname{tang}2a$$

Si l'on développe

$$\operatorname{tang}(45+a),\quad \operatorname{tang}(45-a)\quad \text{et}\quad \operatorname{tang}2a,$$

il vient

$$\frac{\operatorname{tang}45+\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}45\operatorname{tang}a}-\frac{\operatorname{tang}45-\operatorname{tang}a}{1+\operatorname{tang}45\operatorname{tang}a}$$

$$=2\left(\frac{2\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}^2a}\right)=\frac{4\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}2a}.$$

Si l'on remarque que $\operatorname{tang}45=1$, l'égalité devient

$$\frac{1+\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}a}-\frac{1-\operatorname{tang}a}{1+\operatorname{tang}a}=\frac{4\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}2a}.$$

Réduisant au même dénominateur et remarquant que

$$(1+\operatorname{tang}a)(1-\operatorname{tang}a)=1-\operatorname{tang}2a,$$

$$\frac{(1+\operatorname{tang}a)^2-(1-\operatorname{tang}a)^2}{1-\operatorname{tang}2a}=\frac{4\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}2a};$$

supprimant le dénominateur commun $1-\operatorname{tang}2a$ et développant le premier membre,

$$1+2\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}2a-1+2\operatorname{tang}a-\operatorname{tang}2a=4\operatorname{tang}a,$$

ou, après réduction,

$$4\operatorname{tang}a=4\operatorname{tang}a,$$

identité qui confirme l'égalité proposée. (V. la S.)

28. On a

$$\cos x=\sin(90^\circ-x);$$

donc

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(90-x)=2\sin 45^\circ\cos(x-45^\circ).$$

L'équation donnée se transforme donc en la suivante :

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}\cos(x-45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\cos(x-45^\circ)=\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$x - 45^\circ = 2n\pi \pm 60^\circ,$$

car le plus petit des arcs positifs ayant pour cosinus $\frac{1}{2}$ est l'arc de 60 degrés. Donc enfin

$$x = 2n\pi \pm 60^\circ + 45^\circ. \quad (S.)$$

On arriverait au même résultat en résolvant les deux équations

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

et

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

par rapport aux deux inconnues $\sin x$ et $\cos x$; mais cette seconde méthode est moins élégante que la précédente. (V. la S.)

29. L'équation du problème est

$$\cot x = 1;$$

mais on sait qu'on a

$$\operatorname{tang} x \cot x = 1,$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = 1 \quad \text{et} \quad x = (2\pi + 1)\pi + 45^\circ.$$

Le sinus a donc pour valeur

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (S.)$$

le signe + convenant aux arcs qui ont leur extrémité dans le premier quadrant et le signe — à ceux qui se terminent dans le troisième.

3° TABLES.

30. La formule qui donne la tangente de la moitié d'un angle en fonction du cosinus de cet angle est

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}};$$

faisant

$$a = 60^\circ, \quad \cos a = \frac{1}{2},$$

on a

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773. \quad (S.)$$

31. Nous aurons

$$\operatorname{arc} 10^\circ = \frac{\pi \times 10}{180} = 0{,}174532925.$$

On sait que la différence entre l'arc et son sinus est moindre que $\frac{1}{4}$ du cube de l'arc, ce qui peut s'écrire

$$\sin a > a - \frac{a^3}{4}.$$

En calculant $\frac{a^3}{4}$, on trouve 0,00133 ; donc $\sin 10^\circ$ est compris entre 0,17453 et 0,17321, à 0,001 près ; on a donc

$$\sin 10^\circ = 0{,}173 \quad \text{à } 0{,}001 \text{ près.} \quad (S.)$$

32. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\sin\ 20^\circ &= 0{,}3420201 \quad (S.)\\
\sin\ 92^\circ &= 0{,}9993910 \quad (S.)\\
\sin 164^\circ &= 0{,}2756372 \quad (S.)\\
\hline
\text{Somme} &= 1{,}6170483 \quad (S.)\\
\sin 236^\circ &= -0{,}8290376 \quad (S.)\\
\sin 308^\circ &= -0{,}7880107 \quad (S.)\\
\hline
\text{Somme} &= -1{,}6170483 \quad (S.)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que la somme algébrique des sinus proposés est nulle.

33. Les Tables de Callet permettent d'évaluer les angles à 0,1, à la rigueur même à 0,01 de seconde, mais ce dernier chiffre peut être fautif de quelques unités.

L'arc dont le sinus vaut $\sqrt{\frac{2}{3}}$ vaut

$$54^\circ 44' 8'',18. \quad (S.)$$

34. L'arc qui a pour tangente $\sqrt{\frac{2}{3}}$ est

$$39^\circ 15' 53'',43. \quad (S.)$$

35. Nous avons l'expression

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x;$$

réduisons au même dénominateur, nous aurons

$$\frac{\sin 7x - 2\sin x\cos 2x - 2\sin x\cos 4x - 2\sin x\cos 6x}{\sin x}.$$

Or remarquons que la formule qui donne la différence de deux sinus donne

$$\sin(m+2)a - \sin ma = 2\sin a\cos(m+1)a;$$

faisons successivement

$$m = 1,$$
$$m = 3,$$
$$m = 5$$

et

$$a = x,$$

nous aurons

$$2\sin x\cos 2x = \sin 3x - \sin x,$$
$$2\sin x\cos 4x = \sin 5x - \sin 3x,$$
$$2\sin x\cos 6x = \sin 7x - \sin 5x,$$

relations qui nous montrent que l'expression proposée se réduit à

$$\frac{\sin x}{\sin x},$$

rapport dont la valeur constante est 1. (S.)

36. Soient a et b deux arcs quelconques. On a

$$\operatorname{tang} a \cot a = 1,$$
$$\operatorname{tang} b \cot b = 1,$$

d'où

$$\operatorname{tang} a \cot a = \operatorname{tang} b \cot b,$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log \operatorname{tang} a + \log \cot a = \log \operatorname{tang} b + \log \cot b,$$

ou enfin

$$\log \operatorname{tang} a - \log \operatorname{tang} b = \log \cot b - \log \cot a. \quad \text{(S.)}$$

Cette relation montre que la différence des logarithmes des tangentes de deux arcs a et b est égale en valeur absolue à la différence des logarithmes de leurs cotangentes.

37. Arc $10^\circ = \frac{\pi 10}{180} = \frac{\pi}{18} = 0{,}174$. On aura donc

$$\text{arc}\, 10^\circ < 0{,}18,$$

et par suite

$$\text{arc}\, 10^\circ - \sin 10^\circ < \frac{\overline{0{,}18}^3}{4} \quad \text{ou} \quad 0{,}0014.$$

On voit, d'après cela, que la valeur de l'arc 10° représente celle du sinus, avec une erreur $< 0{,}002$. On pourra donc compter sur deux décimales exactes, et l'on aura

$$\sin 10^\circ = 0{,}17, \quad \text{(S.)}$$

à 0,01 près.

38. Si l'on considère la circonférence dont le rayon est pris pour unité, il est bien évident que l'angle MOM′ correspondant à l'arc demandé est double de l'angle MOA, dont le sinus est égal aux $\frac{3}{4}$ du rayon 1. On a donc

$$\sin \frac{\omega}{2} = 0{,}75.$$

Les Tables donnent immédiatement

$$\omega = 97^\circ\, 10'\, 50'',76. \quad \text{(S.)}$$

Cela posé, si l'on veut le rapport x entre l'arc correspondant X et le rayon, on l'obtiendra par la proportion

$$\frac{\omega}{180} = \frac{X}{\pi R},$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{X}{R} = \pi \frac{97^\circ\, 40'\, 50'',76}{180^\circ} = 1,7048509.$$

Ce dernier calcul s'effectue rapidement au moyen des Tables de rapports des longueurs des degrés au rayon pris pour unité, Tables qui se trouvent dans les Tables de Callet, à la suite de la Table des logarithmes des nombres. (*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 38.)

4° RENDRE CALCULABLE PAR LOGARITHMES.

39 Nous écrirons

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \left(1 + \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}\right);$$

posons alors

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$$

(pour cela, nous aurons soin de diviser d'abord par la plus grande des deux lignes tang a et tang b, car un cosinus doit être moindre que 1), nous aurons

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a (1 + \cos \varphi) = 2 \operatorname{tang} a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi, \quad (S.)$$

formule calculable par logarithmes.

40. On a

$$A + B + C = 180^\circ,$$

d'où l'on tire

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

et par suite

$$\sin C = \sin (A + B);$$

donc

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin (A + B),$$

mais

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

et

$$\sin (A + B) = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A + B}{2};$$

donc

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2}\left(\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2}\right).$$

Remplaçant

$$\sin \frac{A+B}{2} \quad \text{par} \quad \cos \frac{C}{2}$$

et

$$\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2} \quad \text{par} \quad 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2},$$

on a

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (S.)$$

41. Soit l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

Les racines sont

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

On peut les écrire ainsi :

$$x' = \frac{p}{2}\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right),$$

$$x'' = \frac{p}{2}\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Si les racines sont réelles, on aura

$$\frac{4q}{p^2} < 1,$$

et par suite on pourra poser

$$\sin^2 \varphi = \frac{4q}{p^2}.$$

En substituant, on aura

$$x' = \frac{p}{2}(-1 + \cos \varphi) = -\frac{p}{2}(1 - \cos \varphi)$$

$$= -\frac{p}{2} \times 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -p \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (S.)$$

$$x'' = \frac{p}{2}(-1 + \cos \varphi) = -\frac{p}{2} \times 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = -p \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (S.)$$

42. $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \cos 15^\circ (1 - \operatorname{tang} 15^\circ)$

$$= \cos 15^\circ (\operatorname{tang} 45^\circ - \operatorname{tang} 15^\circ) = \cos 15^\circ \frac{(\sin 45^\circ - 15^\circ)}{\cos 45^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{(S.)}$$

5° ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

43. On a

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\cos(a + b) \cos(a - b) = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b.$$

Remplaçons dans le second membre

$$\cos^2 b \quad \text{par} \quad 1 - \sin^2 b,$$
$$\sin^2 a \quad \text{par} \quad 1 - \cos^2 a,$$

il viendra

$$\begin{aligned}\cos(a+b)\cos(a-b) &= \cos^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \cos^2 a)\\ &= \cos^2 a - \cos^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 b \cos^2 a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 b. \quad (\textit{Voy.} \text{ la S.})\end{aligned}$$

44. On a

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}.$$

Or, dans l'exemple proposé,

$$\frac{A + B}{2} = 22^\circ 37' 2'',5 \quad \frac{A - B}{2} = 1^\circ 20' 16'',5.$$

On aura donc

$$\sin x = 2 \sin 22^\circ 37' 2'',5 \times \cos 1^\circ 20' 16'',5,$$

d'où l'on conclut

$$\log \sin x = \left\{ \begin{array}{ll} \log 2 & = 0,3010300 \\ + \log \sin 22^\circ 37' \ 2'',5 & = \bar{1},5849811 \\ + \log \cos \ 1^\circ 20' 16'',5 & = \bar{1},9998815 \\ \hline & \bar{1},8858926 \end{array} \right.$$

et par suite

$$x = 50^\circ 15' 31''. \quad (S.)$$

45. On a

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$

Substituant dans l'équation proposée et divisant les deux membres par $\cos x - \sin x$, on trouve

$$\cos x + \sin x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Élevant au carré, on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4};$$

mais

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Substituant, on a

$$\sin 2x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où

$$2x = 60^\circ \quad \text{et} \quad x = 30^\circ. \quad (S.)$$

46. Dans l'équation donnée

$$\operatorname{tang} 2x = 3 \operatorname{tang} x;$$

remplaçons $\operatorname{tang} 2x$ par sa valeur $\frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x}$ et il vient

$$\frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x} = 3 \operatorname{tang} x$$

ou bien

$$2 = 3 - 3 \operatorname{tang}^2 x,$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Or on a

$$\sin x = \frac{\tang x}{\sqrt{1+\tang^2 x}}$$

et

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2 x}}.$$

Remplaçant dans ces formules $\tang x$ par $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on trouve

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

par suite

$$x = 30^\circ. \quad (\text{S.})$$

47. $$\cos 2x = a(\cos x - \sin x)$$

ou bien

$$\cos^2 x - \sin^2 x = a(\cos x - \sin x)$$

et, en divisant les deux membres par $\cos x - \sin x$, il vient

(1) $$\cos x + \sin x = a;$$

mais

(2) $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Élevant l'équation (1) au carré et en retranchant l'équation (2), on a

$$2\sin x \cos x = a^2 - 1 \quad \text{ou} \quad \sin x \cos x = \frac{a^2-1}{2};$$

$\sin x$ et $\cos x$ sont donnés par une équation du second degré de la forme

$$u^2 - au + \frac{a^2-1}{2} = 0,$$

d'où

$$u = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2-1}{2}} \quad \text{ou} \quad u = \frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2};$$

alors on a

$$\sin x = \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2},$$

en même temps que

$$\cos x = \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$$

ou bien

$$\cos x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2},$$

en même temps que

$$\sin x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que le radical soit positif, c'est-à-dire $a < \sqrt{2}$. De plus, il faut $u < 1$, c'est-à-dire que l'on ait

$$2 > a \pm \sqrt{2 - a^2} \quad \text{ou} \quad (2 - a)^2 > 2 - a^2,$$

ou en simplifiant

$$(a^2 - 2a + 1) > 0, \quad \text{ou enfin} \quad a - 1 > 0,$$

ce qui exige $a > 1$. Ainsi, en réunissant les deux conditions de possibilité, a doit être compris entre 1 et $\sqrt{2}$, soit

$$1 < a < \sqrt{2}. \quad (\textit{Voy.} \text{ la S.})$$

48. On peut écrire

$$\cos x\,(\operatorname{tang} x - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Or

$$1 = \operatorname{tang} 45^\circ;$$

donc

$$\cos x\,(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ou bien

$$\cos x \times \frac{\sin(x - 45^\circ)}{\cos x \cos 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2};$$

donc

$$x - 45^\circ = 30^\circ, \quad \text{d'où} \quad x = 75^\circ. \quad (\text{S.})$$

49. Soit x l'une des parties de l'arc. L'autre partie sera $30^\circ - x$ et l'équation du problème est

$$3 \sin x = \sin(30 - x).$$

Développant le second membre,

$$3 \sin x = \sin 30 \cos x - \cos 30 \sin x.$$

Remplaçant $\sin 30$ par sa valeur $\frac{1}{2}$ et $\cos 30$ par $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, il vient

$$3 \sin x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin x$$

ou

$$6 \sin x = \cos x - \sqrt{3} \sin x.$$

Mettant $\sin x$ en facteur,

$$(6 + \sqrt{3}) \sin x = \cos x,$$

d'où

$$6 + \sqrt{3} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$\cot x > \cot 30,$$

car x est moindre que 30°, et l'on sait que dans le premier quadrant, lorsqu'un arc diminue, sa cotangente augmente. Or

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

La condition est donc bien réalisée, puisque

$$6 + \sqrt{3} > \sqrt{3}.$$

Reprenant la valeur

$$\cot x = 6 + \sqrt{3}$$

et effectuant, on trouve

$$x = 7^\circ 22' \ 9'',5, \quad (S.)$$
$$30 - x = 22^\circ 37' 50'',5. \quad (S.)$$

50. Soit α l'angle du secteur et $OA = R$. On a

$$\text{vol. sect. AOC} = \text{calotte CAE} \times \frac{R}{3}.$$

Mais

$$\text{calotte CAE} = 2\pi R \times AD = 2\pi R (R - OD);$$

mais, dans le triangle rectangle COD, on a

$$OD = CO, \quad \cos\alpha = R \cos\alpha;$$

donc

$$\text{calotte CAE} = 2\pi R(R - R\cos\alpha) = 2\pi R^2(1 - \cos\alpha);$$

donc

$$\text{vol. AOC} = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\alpha).$$

Or ce volume vaut le quart de la sphère ou $\frac{1}{3}\pi R^3$, d'où l'équation

$$\frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{3}\pi R^3$$

et

$$2(1 - \cos\alpha) = 1,$$

ou

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

L'angle du premier quadrant qui a pour valeur de son cosinus $\frac{1}{2}$ est l'angle de 60°. Donc

$$\alpha = 60. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 50.)

51. L'équation

$$(\sin x - a) = \sin x - \sin a$$

donne, si l'on développe le premier membre,

$$\sin x \cos a - \cos x \sin a = \sin x - \sin a$$

ou

$$\sin a - \cos x \sin a = \sin x - \sin x \cos a.$$

Mettant $\sin x$ en facteurs ainsi que $\sin a$,

$$\sin a(1 - \cos x) = \sin x(1 - \cos a).$$

Or on sait que

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \quad \text{et que} \quad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2};$$

on a donc

$$\sin a \,.\, 2\sin^2\frac{x}{2} = \sin x \,.\, 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Remplaçant enfin

$$\sin a \quad \text{par} \quad 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2},$$

$$\sin x \quad \text{par} \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

il vient

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{a}{2}$$

ou

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{a}{2} = 0,$$

ou encore

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{a}{2}\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Le premier membre est un produit de deux facteurs; pour qu'il s'annule, il faut que l'un des deux facteurs s'annule, c'est-à-dire qu'on ait

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \ldots \quad (1^{re}\ \text{S.})$$

ou bien

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{a}{2} = 0 \ldots \quad (2^{e}\ \text{S.})$$

La première solution

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{x}{2} = 0,$$

n'ayant d'autre variable que x, donne

$$\sin\frac{x}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{2} = 0, \quad \text{et enfin} \quad x = 0.$$

La seconde

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{a}{2} = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{x}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad x = a. \quad (\text{S.})$$

On remarquera d'ailleurs qu'on peut ajouter à x, dans les deux solutions, autant de circonférences entières, positives ou négatives que l'on veut.

52. Si l'on développe $\tang 2x$, l'égalité devient

$$\frac{2\tang x}{1-\tang^2 x}=3\tang x \quad \text{ou} \quad \frac{2}{1-\tang^2 x}=3;$$

$$2=3-3\tang^2 x, \quad \tang^2 x=\frac{1}{3},$$

d'où

$$\tang x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Or l'angle aigu positif qui a pour tangente $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est l'angle de 30 degrés; on a encore l'arc de $180+30=210$ qui a même tangente. Ainsi

$$x'=2n\pi+30^\circ, \quad x''=2n\pi+210^\circ.$$

On en déduit

$$\sin x'=\frac{1}{2}, \quad \sin x''=-\frac{1}{2},$$

d'où

$$\sin x=\pm\frac{1}{2}. \quad \text{(S.)}$$

53. Dans l'équation donnée

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

remplaçons $\cos x$ par sa valeur $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, il vient

$$a\sin x\pm b\sqrt{1-\sin^2 x}=c$$

ou

$$\pm b\sqrt{1-\sin^2 x}=c-a\sin x;$$

élevant au carré et développant,

$$b^2-b^2\sin^2 x=c^2+a^2\sin^2 x-2ac\sin x,$$

d'où

$$(a^2+b^2)\sin^2 x-2ac\sin x+c^2-b^2=0.$$

On en tire

$$\sin x=\frac{2ac\pm\sqrt{4a^2c^2-4(a^2+b^2)(c^2-b^2)}}{2(a^2+b^2)},$$

et après réduction

$$\text{si: } x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

Les conditions de possibilité du problème sont que $\sin x$ soit réel et inférieur à 1, ce qui donne

$$(1) \qquad a^2+b^2-c^2>0$$

et

$$(2) \qquad \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \leqslant 1.$$

La condition (2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{ac}{a^2+b^2} \pm \frac{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \leqslant 1$$

ou

$$\pm \frac{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \leqslant 1 - \frac{ac}{a^2+b^2}$$

ou

$$\pm \frac{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2-ac}{a^2+b^2}$$

ou

$$\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2} \leqslant a^2+b^2-ac.$$

Dans le cas où les trois nombres a, b, c seraient positifs, et seulement dans ce cas, à cause du signe — du radical, on aurait, en élevant au carré,

$$b^2(a^2+b^2-c^2) \leqslant (a^2+b^2-ac)^2,$$

d'où

$$a^2+b^2-c^2 \leqslant \left(\frac{a^2+b^2-ac}{b}\right)^2,$$

condition qui donne avec la condition (1) les limites entre lesquelles peut varier la quantité $a^2+b^2-c^2$.

La valeur de $\sin x$ étant reportée dans l'équation primitive, on en tire $\cos x$; et les valeurs comparées de $\sin x$ et $\cos x$, dans lesquelles on tiendra compte des signes, détermineront le quadrant où se termine l'arc x.

Appliquons ce résultat à l'exemple

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3},$$

il vient

$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{3+1},$$

d'où

$$\sin x' = 1, \quad \sin x'' = \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$\cos x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}(1 - \sin x),$$

d'où

$$\cos x' = 0, \quad \cos x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$x' = 2n\pi + 90^\circ, \quad (S.) \qquad x'' = 2n\pi + 30^\circ. \quad (S.)$$

54. L'équation $4\sin x + 3\cos x = 2$ peut s'écrire

$$\frac{4}{3}\sin x + \cos x = \frac{2}{3}.$$

Posons

$$\frac{4}{3} = \operatorname{tang}\varphi,$$

on a alors

$$\operatorname{tang}\varphi \sin x + \cos x = \frac{2}{3},$$

$$\sin\varphi \sin x + \cos\varphi \cos x = \frac{2\cos\varphi}{3},$$

d'où

$$\cos(x - \varphi) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Appelons α le plus petit des arcs positifs qui ont pour cosinus $\frac{2}{5}$; on obtient

$$\cos(x - \varphi) = \cos\alpha,$$

d'où

$$x - \varphi = 2k\pi \pm \alpha,$$

et enfin

$$x = 2k\pi \pm \alpha + \varphi.$$

Il reste à calculer les deux arcs φ et α au moyen des formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{4}{3} \quad (S.) \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{5} \quad (S.)$$

55. Soit x l'une des parties ; l'autre sera

$$45 - x,$$

d'où, d'après l'énoncé,

$$\sin x = 2 \sin (45 - x),$$

ou, en développant,

$$\sin x = 2 (\sin 45 \cos x - \cos 45 \sin x).$$

Remplaçant $\sin 45$ et $\cos 45$ par leur valeur commune $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et divisant par $\cos x$, il vient

$$\operatorname{tang} x = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tang} x \right),$$

d'où

$$\operatorname{tang} x (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Cette valeur peut être transformée de la manière suivante :

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} - 2}{-1},$$

ou enfin

$$\operatorname{tang} x = \frac{2 - \sqrt{2}}{1} = 2 - \sqrt{2}. \quad \text{(S.)}$$

56. Divisant par a, il vient

$$\sin x + \frac{b \cos x}{a} = \frac{1}{a},$$

ou, posant $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \varphi$,

$$\sin x + \operatorname{tang} \varphi \cos x = \frac{1}{a},$$

ou successivement

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{\cos \varphi}{a},$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{\cos \varphi}{a};$$

mais

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Donc enfin

$$\sin(x+\varphi) = \frac{a}{a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \text{(S.)}$$

Pour qu'on puisse trouver par cette formule des valeurs satisfaisant à la question, il faut

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad a^2+b^2 \geqslant 1. \quad \text{(S.)}$$

57. Posons

$$\tang x + 3\cot x = m,$$

d'où

$$\tang x + \frac{3}{\tang x} = m,$$

$$\tang^2 x - m\tang x + 3 = 0,$$

d'où enfin

$$\tang x = \frac{m \pm \sqrt{m^2-12}}{2}.$$

Les racines de l'équation $m^2 - 12 = 0$ sont

$$m' = -2\sqrt{3}, \qquad m'' = +2\sqrt{3}.$$

Le coefficient de m^2 étant positif, la plus petite racine $m' = -2\sqrt{3}$ est un maximum; la plus grande racine $m'' = +2\sqrt{3}$ est un minimum.

Ainsi le minimum de l'expression proposée est

$$2\sqrt{3};$$

la valeur correspondante de $\tang x$ est

$$\tang x = \frac{m''}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Si l'on ne connaît pas l'arc compris entre 0 et 90° dont la tangente est $\sqrt{3}$, on calculera $\sin x$

$$\sin x = \frac{\tang x}{\sqrt{1+\tang^2 x}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x = 60^\circ. \quad (S.)$$

58. Dans le triangle HOF on a

$$\overline{HF}^2 = \overline{OH}^2 + OF^2 - 2\,OH.OF\cos O.$$

D'ailleurs

$$HF = a\sqrt{2}, \quad OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad OF = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$2a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2\frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos O,$$

équation d'où l'on peut déduire $\cos O$, et par suite $\sin O$.

Mais il est plus simple de remarquer que la figure HFBD est un rectangle, et qu'on a par conséquent

$$OI \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2} = OF\cos\frac{O}{2} \quad \text{et} \quad IF = OF\sin\frac{O}{2}.$$

Donc

$$2\frac{a}{2}IF = 2\,\overline{OF}^2\sin\frac{O}{2}\cos\frac{O}{2} = \overline{OF}^2\sin O,$$

c'est-à-dire

$$\sin O = \frac{a.IF}{\overline{OF}^2}, \quad IF = \frac{HF}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad OF = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

donc

$$\sin O = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3a^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 58.)

59. SH étant la hauteur du tétraèdre, on a

$$SH = SA\sin SAH \quad \text{ou} \quad SH = a\sin\alpha,$$

en désignant par a l'arête du tétraèdre, par α l'angle dont on cherche le sinus,

$$\overline{SH}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AH}^2 = a^2 - \overline{AH}^2;$$

mais

$$AH = \frac{2}{3}, \quad AD = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

d'où

$$\overline{SH}^2 = a^2 - \frac{3a}{9} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \quad \text{et} \quad SH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Substituant dans la première relation, il vient

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a \sin\alpha,$$

d'où enfin

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 59.)

6° APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

60. On sait que, dans un cercle de rayon 1, la différence entre un arc et son sinus est moindre que $\frac{1}{4}$ du cube de l'arc. Appelant donc a l'arc, c la corde et R le rayon du cercle, nous aurons

$$\frac{a-c}{R} < \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{2R^3},$$

$$a - c < \frac{a^3}{16R^2}.$$

Nous voulons satisfaire à la condition

$$a - c < 0{,}001;$$

cela aura lieu *à fortiori* si nous posons

$$\frac{a^2}{16R^2} < 0{,}001,$$

$$R > \sqrt{\frac{a}{0{,}016}},$$

et comme $a = 75^m$,

$$R > 5135^m. \quad (S.)$$

61. Soit R le rayon de la sphère. Calculons le volume

$$CFDS = V = CDS - CFD.$$

(1) $$\text{cône}\,CDS = \pi \times \overline{CE}^2 \times \frac{SE}{3}.$$

Dans le triangle CEO, on a

$$CE = CO \cos OCE = R \cos\alpha,$$

d'où

$$CE^2 = R^2 \cos^2\alpha;$$

dans le triangle SCE, on a

$$SE = CE \cot CSE = \frac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Substituant dans (1), il vient

$$\text{cône}\,CDS = \pi \times R^2 \cos^2\alpha \times \frac{R\cos^2\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{\pi R^3 \cos^4\alpha}{3\sin\alpha}.$$

Le segment sphérique à une base CFD a pour mesure le volume d'une sphère qui aurait sa hauteur pour diamètre, plus la moitié de celui d'un cylindre qui aurait même base et même hauteur que lui. On a donc

(2) $$\text{vol}\,CFD = \frac{1}{6}\pi\,\overline{EF}^3 + \frac{1}{2}\pi \times CE^2 \times EF.$$

On a

$$EF = OF - OE = R - R\sin\alpha = R(1 - \sin\alpha),$$

d'où, en substituant,

$$\text{vol. } CFD = \frac{\pi R^3}{6}(1 - \sin\alpha)^3 + \frac{\pi R^3}{2}(1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin\alpha),$$

et par suite

$$V = \frac{\pi R^3 \cos^4\alpha}{3\sin\alpha} - \frac{\pi R^3 (1-\sin\alpha)^3}{6} - \frac{\pi R^3 (1-\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha)}{2},$$

ce qui donne, en réduisant au même dénominateur, en remplaçant $\cos^4\alpha$ par $(1-\sin^2\alpha)^2$, en développant et en effectuant les calculs,

$$V = \frac{2\pi R^3 (1-\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha}.$$

Le volume V' de la sphère vaut

$$\frac{4\pi R^3}{3}.$$

On aura

$$\frac{V}{V'} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha} = \frac{[1-\cos(90-\alpha)]^2}{4\sin\alpha} = \frac{\sin^4\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$

Si l'on fait $\alpha = 60^\circ$, il vient

$$x = \frac{V}{V'} = \frac{\sin^4 15}{\sin 60},$$

$$\log x = 4\log\sin 15 - \log\sin 60;$$

$$\begin{aligned} 4\log\sin 15 &= \bar{3},6519848 \\ -\ \log\sin 60 &= 0,0624694 \\ \hline \log x &= \bar{3},7144542 \end{aligned}$$

$$x = 0,00518. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 61.)

62. La longueur d'un arc est donnée par la formule

$$l = \frac{\pi r n}{180}.$$

Dans cette formule, n vaut $3^\circ\ 36' = 216'$.

Calculons r, rayon du parallèle. Soit R le rayon de la Terre. Le triangle AOO', rectangle en O', donne, en remarquant que l'angle $\widehat{O'AO} = \widehat{AOE}$

$$AO = r = OA\cos\widehat{O'AO} = R\cos 48^\circ 50'.$$

Or on a

$$2\pi R = 40000000^m,$$

d'où
$$R = \frac{20000000}{\pi}.$$
On aura donc
$$r = \frac{20000000 \cos 48^\circ 50'}{\pi},$$
et par suite
$$l = \frac{20000000 \times \cos 48^\circ 50' \times 216}{10800} = \frac{43200000 \cos 48^\circ 50'}{108},$$
$$\log l = \log 43200000 + \log \cos 48,50 \log 108;$$
$$\begin{aligned} \log 43200000 &= 7,6354837 \\ \log \cos 48^\circ 50 &= \bar{1},8183919 \\ \log 108 &= \bar{3},9665762 \\ \hline \log l &= 5,4204518 \\ l &= 263300^m. \quad (S.) \end{aligned}$$

63. Segment CMD = secteur CMDO — triangle COD,
$$\text{secteur CMDO} = \text{arc CD} \times \frac{1}{2}.$$
Si nous appelons $2x$ l'angle COD, nous aurons dans le triangle COE
$$\cos x = \frac{CO}{OE} = 0,70,$$
d'où l'on tire
$$\log \cos x = \log 0,70 = \bar{1},8450980,$$
et par suite
$$x = 45^\circ 34' 22'',79,$$
$$2x = 91^\circ 8' 45'',58 = 328125'',58.$$
On aura ainsi, 1296000 étant le nombre de secondes contenues dans 360°,
$$\text{secteur CMDO} = \frac{\pi \times 328125,58}{1296000},$$
$$\log \text{secteur} = \log \pi + \log 328125,58 - \log 1296000;$$
$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971497 \\ \log 328125,58 &= 5,5160460 \\ \log 1296000 &= 7,8873930 \\ \hline \log \text{secteur} &= \bar{1},9005847 \\ \text{surface secteur} &= 0^{mq},795398. \end{aligned}$$

Calcu'ons maintenant la surface du triangle COD.

$$\text{surface COD} = \frac{\text{CD} \times \text{OE}}{2} = 0{,}35 \times \cos x,$$

$$\log \text{COD} = \log 0{,}35 + \log \cos x;$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}35 &= \bar{1}{,}5440680 \\ \log \cos x &= \bar{1}{,}8450980 \\ \hline \log \text{COD} &= \bar{1}{,}3891660 \\ \text{triangle COD} &= 0{,}24500. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\text{segment CMD} = 0^{\text{mq}}{,}593398 - 0^{\text{mq}}{,}24500 = 0^{\text{mq}}{,}3504. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 63.)

64. Soit R le rayon de la Terre. On aura

$$\text{zone AE} = 2\pi \text{R} \times \text{OM}.$$

Or, d'après les données, on a

$$\text{R} = \frac{40000}{2\pi} = \frac{20000}{\pi};$$

de plus, OM = AC, et le triangle rectangle OAC donne

$$\text{AC} = \text{OA} \sin \text{AOC} = \text{R} \sin 45^\circ;$$

par suite, il vient

$$x = \text{zone AE} = 40000 \times \frac{20000}{\pi} \times \sin 45^\circ = \frac{800000000 \sin 45^\circ}{\pi},$$

$$\log x = \log \sin 45^\circ + \log 800000000 - \log \pi;$$

$$\begin{aligned} \log \sin 45^\circ &= \bar{1}{,}8494850 \\ \log 800000000 &= 8{,}9030900 \\ -\log \pi &= \bar{1}{,}5028503 \\ \hline \log x &= 8{,}2557253 \\ x &= 180062380^{\text{kil. q.}}. \quad \text{(S.)} \end{aligned}$$

65. D'après une formule connue

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c;$$

multipliant $a^2 + b^2$ par 1 ou par son égal $\sin^2 \frac{c}{2} + \cos^2 \frac{c}{2}$ et rem-

plaçant $\cos c$ par sa valeur $\cos^2\frac{c}{2} - \sin^2\frac{c}{2}$, il vient

$$c^2 = (a^2 + b^2)\left(\sin^2\frac{c}{2} + \cos^2\frac{c}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{c}{2} - \sin^2\frac{c}{2}\right),$$

$$= (a^2 + 2ab + b)\sin^2\frac{c}{2} + (a^2 + 2ab + b^2)\cos^2\frac{c}{2},$$

$$= (a+b)^2\sin^2\frac{c}{2} + (a-b)^2\cos^2\frac{c}{2},$$

$$= (a+b)^2\sin^2\frac{c}{2}\left[1 + \frac{(a-b)^2\cos^2\frac{c}{2}}{(a+b)^2\sin^2\frac{c}{2}}\right],$$

$$= (a+b)^2\sin^2\frac{c}{2}\left[1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cot^2\frac{c}{2}\right];$$

si nous posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{c}{2},$$

nous aurons

$$c^2 = (a+b)^2\sin^2\frac{c}{2}(1 + \operatorname{tang}^2\varphi),$$

ou

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{c}{2}}{\cos\varphi}. \quad \text{(S.)}$$

La formule est calculable par logarithmes, mais il convient d'observer que l'angle auxiliaire φ est précisément $\frac{A-B}{2}$, car $\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{c}{2}$.

66. La solution géométrique peut être tirée de la *Géométrie* de Blanchet, livre III, proposition XXXV.

(1) $$bc = mn + x^2,$$

mais

$$m + n = a, \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{c},$$

d'où la composition des rapports

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{b+c}, \quad \frac{n}{a} = \frac{c}{b+c}.$$

Substituant dans (1), il vient

$$bc = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} + x^2;$$

on tire de là

$$x^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

Désignant par $2p$ le périmètre du triangle, il vient

$$x^2 = \frac{4pbc(p-a)}{(b+c)^2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2\sqrt{pbc(p-a)}}{b+c}. \quad \text{(S.)}$$

On a de même pour les bissectrices y et z des angles B et C

$$y = \frac{2\sqrt{pac(p-b)}}{a+c}, \quad \text{(S.)} \quad z = \frac{2\sqrt{pab(p-c)}}{a+b}. \quad \text{(S.)}$$

Solution trigonométrique. — On a

$$\frac{x}{\sin C} = \frac{m}{\sin\frac{A}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sin B} = \frac{n}{\sin\frac{A}{2}},$$

d'où

$$x^2 = \frac{mn \sin B \sin C}{\sin^2\frac{A}{2}} = 4mn \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Remplaçant mn par les valeurs trouvées précédemment et les lignes trigonométriques en fonctions des côtés, on obtient, toutes réductions faites, la même formule que plus haut.

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 66.)

67. Il s'agit de calculer la tangente de l'angle aigu CED que forment les diagonales AD, BC du parallélépipède rectangle. Or, dans le triangle rectangle ABD, on a

$$AB = BD \tang BDA.$$

Mais AB, diagonale du carré, $= a\sqrt{2}$, $BD = h$, et l'angle BDA est la moitié de l'angle α. Donc

$$a\sqrt{2} = h \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{h};$$

d'autre part,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{2\alpha}{2}}.$$

Substituant à $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ sa valeur, il vient définitivement

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\frac{2a\sqrt{2}}{h}}{1 - \frac{2a^2}{h^2}} = \frac{2a\sqrt{2}h^2}{h(h^2 - 2a^2)} = \frac{2ah\sqrt{2}}{h^2 - 2a^2}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 67.)

68. Surface BAC = surf. BACO — surf. BCO,
surf. BACO = 2 surf. BAO = BA × BO ;

or

$$BO = 1,$$
$$BA = BO \cot BAO = \cot 20^\circ.$$

Donc

$$\text{surf. BACO} = \cot 20^\circ,$$

$$\text{surf. BCO} = \frac{\pi R^2 h}{360} = \frac{40\pi}{360} = \frac{\pi}{9}.$$

On aura donc

$$x = \cot 20^\circ - \frac{\pi}{9},$$

$$\log \cot 20^\circ = 0,4389341,$$

$$\left.\begin{aligned} \cot 20^\circ &= 2,74747 \\ \frac{\pi}{9} &= 0,34906 \end{aligned}\right\} x = 2^{mq},3984. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 68.)

69. J'ai l'équation

$$2,5 \sin x + 2,7182 \cos x = 3,1416.$$

Divisant les deux membres par 2,5, il vient

$$(1) \qquad \sin x + \frac{2,7182}{2,9}\cos x = \frac{3,1416}{2,5}.$$

Posons

$$\frac{2,7182}{2,5} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

il vient

$$(2) \qquad \sin(x+\varphi) = \frac{3,1416\cos\varphi}{2,5},$$

calcul de

$$\varphi = 47^\circ 23' 39'',98,$$

calcul de

$$x + \varphi = 58^\circ 17' 7'',8.$$

L'angle $x+\varphi$ donné par les tables est le plus petit arc positif qui satisfasse à l'équation (2). Tous les arcs satisfaisant à cette équation sont compris dans la formule

$$x + \varphi = 2k\pi + 58^\circ 17' 7'',8,$$
$$x + \varphi = 2k\pi + \pi - 58^\circ 17' 7'',8,$$

d'où

$$x = 2k\pi + 58^\circ 17' 7'',8 - 47^\circ 23' 39'',98,$$
$$= 2k\pi + 10^\circ 53' 27'',82,$$

ou bien

$$x = 2k\pi + \pi - 58^\circ 17' 7'',8 - 47^\circ 23' 39'',98,$$
$$= 2k\pi + 74^\circ 19' 12'',22. \qquad (S.)$$

70. Abaissons BD perpendiculaire sur OA, nous aurons

$$\text{vol. secteur} = 2\pi R \times AD \times \frac{R}{3}.$$

On a

$$AD = OA - OD = R - OD.$$

Dans le triangle rectangle DOB, on a

$$OD = OB\cos BOD = R\cos\alpha,$$

d'où

$$AD = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

On aura donc

$$x = \text{vol. secteur} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{32\pi}{3}\sin^2 27^\circ 14'$$

en décimètres cubes,

$$\log x = \log 32 + \log \pi + 2 \log \sin 27^\circ,14' - \log^3;$$

$$\begin{aligned} \log 32 &= 1,5051500 \\ \log \pi &= 0,4971497 \\ 2 \log \sin 27,14 &= \bar{1},3210010 \\ -\log 3 &= \bar{1},5229787 \\ \hline & 0,8462794 \\ & \underline{52} \\ & 42 \end{aligned}$$

$$x = 7^{dc},019070. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 70.)

71. Désignons par x la plus grande des deux parties de l'arc; on a, d'après l'énoncé,

$$\frac{\sin x}{\sin(45 - x)} = \frac{2}{1},$$

d'où

$$\sin x = 2(\sin 45^\circ \cos x - \sin x \cos 45^\circ);$$

mais

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc

$$\sin x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x;$$

mais

$$\sin x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}\cos x,$$

$$(1 + \sqrt{2})\sin x = \sqrt{2}\cos x,$$

et enfin

$$\tang x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1} = 2 - \sqrt{2}. \quad (S.)$$

Les tables de logarithmes étant retirées, les candidats n'ont pas à terminer le calcul et à donner la valeur de x.

72. La surface du triangle CAB devra être double de celle du triangle MAP. Or on a

$$(1) \qquad \text{surf. ACB} = \frac{AC \times AB \sin A}{2},$$

$$(2) \qquad \text{surf. MAP} = \frac{AP \times MP}{2}.$$

Le triangle AMP rectangle en P donne

$$AP = MP \cot A.$$

Substituant dans (2), il vient

$$\text{surf. MAP} = \frac{\overline{MP}^2 \cot A}{2};$$

on aura donc l'équation

$$\overline{MP}^2 \cot A = \frac{AC \times AB \sin A}{2}.$$

et, en divisant par cot A,

$$\overline{MP}^2 = \frac{AC \times AB \sin A}{2 \cot A}.$$

Remplaçant par les nombres, il vient

$$\overline{MP}^2 = \frac{201.315 \times 293,917 \sin 23^\circ 27' 32''}{2 \cot 23^\circ 27' 32''},$$

d'où

$$\log MP = \frac{1}{2} (\log 201,315 + \log 293,917$$
$$+ \log \sin 23^\circ 27' 32'' - \log 2 - \log \cot 23^\circ 27' 32'');$$

$$\begin{aligned} \log 201,315 &= 2,3038761 \\ \log 293,917 &= 2,4682247 \\ \log \sin (23^\circ 27' 32'') &= \bar{1},5999823 \\ -\log 2 &= \bar{1},6989700 \\ -\log \cot (23^\circ 27' 32'') &= \bar{1},6374492 \\ \hline & \quad 3,7085023 \end{aligned}$$

$$\log MP = 1,8542511$$
$$MP = 71^m 491. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 72.)

73 Appelons x la première partie et y la seconde, nous aurons

$$\sin x = 3 \sin y,$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{1},$$

ou bien

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{1}{2};$$

d'où l'on tire, en remarquant que

$$\frac{x+y}{2} = 15,$$

$$\operatorname{tang}\frac{(x-y)}{2} = \frac{\operatorname{tang} 15^\circ}{2},$$

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \log \operatorname{tang} 15^\circ - \log 2,$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} 15^\circ &= \bar{1},4280525 \\ -\log 2 &= \bar{1}.6989700 \\ \hline \log \operatorname{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \bar{1},1270225 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{118}{107},$$

$$\frac{x-y}{2} = 7^\circ 37' 30'',66;$$

donc

$$x = 15^\circ + 7^\circ 37' 30'',66 = 22^\circ 37' 30'',66, \quad (S.)$$
$$y = 15^\circ - 7^\circ 37' 30'',66 = 7^\circ 22' 9'',34. \quad (S.)$$

74. Soit R le rayon du secteur, x son angle au centre. Abaissons BD perpendiculaire sur OA, nous aurons

$$\text{vol. sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\text{vol. secteur} = \frac{2}{3}\pi R^2 \times DA$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos x) = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2 \frac{x}{2},$$

d'où

$$\frac{1}{3} = \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\log \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \log 3 = \bar{1},7614394,$$

$$\frac{x}{2} = 35^\circ 15' 51'',81,$$

$$x^2 = 70^\circ 31' 43'',62. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 74.)

75. Je joins OA ; je désigne OA par R, AB par $2c$ et l'angle ASO par $2x$.

Dans le triangle AKO, l'angle O est le complément de x ; on aura donc

$$c = \mathrm{R} \cos x,$$

d'où

$$\cos x = \frac{c}{\mathrm{R}} = \frac{1804,5095}{2548,365},$$

$$\log \cos x = \log 1804,5095 - \log 2548,365;$$

$$\begin{aligned} \log 1804,5095 &= 3,2563591 \\ -\log 2548,365 &= \bar{5},5937384 \\ \hline & \quad \bar{2},8500975 \end{aligned}$$

d'où

$$x = 44^\circ 55' 8'',666$$
$$2x = 89^\circ 50' 17'',333. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 75.)

76. Surface du losange $= 2 \times$ triangle BAD,

$$\text{surf. BAD} = \frac{\overline{AB}^2 \sin A}{2} = \left(\frac{864,36}{4}\right)^2 = \sin A \times (216,09)^2;$$

on aura donc l'équation

$$32548 = \sin A \left(\frac{864,36}{4}\right)^2 = \sin A \times (216,09)^2,$$

d'où

$$\sin A = \frac{32548}{(216,09)^2},$$

$$\log \sin A = \log 32548 - 2 \log 216,09 ;$$

$$\begin{aligned} \log 32548 &= 4,5125243 \\ 2 \log 216,09 &= 4,6692694 \\ \hline & \bar{1},8432549 \end{aligned}$$

$$C = A = 44°11'22'',7 \quad (S.)$$
$$D = B = 180 - A = 135°48'37'',3. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 76.)

77. Soit ABCD le losange et $AC = 92,357$; désignons ses angles par A, B, C, D.

Dans le triangle OAD rectangle, on connaît

$$AO = \frac{92,357}{2} = 46,1785,$$

$$AD = \frac{842,693}{4} = 210^m,67325 ;$$

on a

$$OA = AD \cos \frac{A}{2},$$

d'où

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{OA}{AD} = \frac{46,1785}{210,67325},$$

$$\log \cos \frac{A}{2} = \log 46,1785 - \log 210,67325 ;$$

$$\begin{aligned} \log 46,1785 &= 1,6644398 \\ -\log 210,67325 &= \bar{3},6763907 \\ \hline \log \cos \frac{A}{2} &= \bar{1},3408305 \\ & \quad 9026 \\ & \quad \overline{721}, \end{aligned}$$

$$\frac{A}{2} = 77°20'17'',69,$$

d'où l'on tire

$$A = C = 154°40'35'',3. \quad (S.)$$
$$B = 180 - A = D = 25°19'24'',7. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 77.)

73. $$\text{Surf. AMB} = \text{sect. AOB} - \text{triangle AOB},$$

$$\text{sect. AOB} = \frac{\pi \times \overline{572}^2}{6},$$

$$\text{triangle AOB} = \overline{572}^2 \times \frac{\sin 60}{2} = \overline{572}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{surf. AMB} = \overline{572}^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Je calcule ce produit à 1 centiare près, c'est-à-dire à 1 unité près ; il vient

$$\text{surf. AMB} = 2^{\text{hect}}9446. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 78.)

79 Appelons x la première partie et y la deuxième. Nous aurons

$$\sin x = 3 \sin y,$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{1},$$

ou bien

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ou

$$\frac{\tan g \frac{(x-y)}{2}}{\tan g \frac{(x+y)}{2}} = \frac{1}{2};$$

d'où l'on tire, en remarquant que

$$\frac{x+y}{2} = 15^\circ,$$

$$\tan g \frac{(x-y)}{2} = \frac{\tan g\, 15^\circ}{2},$$

$$\log \tan g \frac{(x-y)}{2} = \log \tan g\, 15^\circ - \log 2;$$

$$\log \tan g\, 15 = \bar{1},4280525$$
$$\log 2 = \bar{1},6989700$$
$$\log \tan g \frac{x-y}{2} = \bar{1},1270225$$

d'où

$$\frac{x-y}{2} = 7°37'50'',66;$$

donc

$$x = 15° + \frac{x-y}{2} = 22°37'50'',66, \quad (S.)$$

$$y = 15° - \frac{x-y}{2} = 7°22'9'',34. \quad (S.)$$

80. Soit CD la corde donnée et R le rayon; on aura

$$CD = \frac{2}{3} \times 2R = \frac{4R}{3}.$$

Menons le diamètre AB perpendiculaire sur le milieu M de la corde CD; joignons COD et désignons par x l'angle COM; on aura

$$CM = CO \sin x,$$

d'où

$$\sin x = \frac{CM}{CO} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3},$$

$$\log \sin x = \log 2 - \log 3;$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$-\log 3 = \bar{1},5228787$$
$$\log \sin x = \bar{1},8239087$$

d'où

$$x = 41°48'32'',89,$$

et par conséquent

$$2x = 83°37'5'',78. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 80.)

81. $2 \sin x = \sin 45° \cos x - \sin x \cos 45°,$

ou bien, comme $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$2 \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x);$$

je divise par $\sin x$, il vient

$$2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cot x - 1);$$

d'où

$$\cot x = \frac{4}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5,414213}{1,414213},$$

$$\log \cot x = \log 5,414213 - \log 1,414213;$$

$$\begin{aligned} \log 5,414213 &= 0,7335353 \\ -\log 1,414213 &= \overline{1},8504852 \\ \hline \log \cot x &= 0,5840205 \end{aligned}$$

$$\frac{435}{230},$$

$$x = 69°3'0'',36. \quad (S.)$$

82. On a

$$\text{vol. sect. BOA}' = \frac{2\pi R^2}{3} \times AC;$$

or

$$AC = OA - OC.$$

Dans le triangle OBC, on a

$$OC = R \cos BOC;$$

donc

$$AC = R(1 \cos BOC) = 2R \sin^2 \frac{BOC}{2},$$

d'où

$$\text{vol. BOA} = \frac{4}{3}\pi \times \overline{7,34}^3 \times \sin 27°30',$$

$$\log V = \log 4 + \log \pi + 3 \log 7,34 + 2 \log \sin 27°30' - \log 3;$$

$$\left.\begin{aligned} \log 4 &= 0,6020600 \\ \log \pi &= 0,4971497 \\ 3 \log 7,34 &= 2,5970883 \\ 2 \log \sin 27°30' &= \overline{1},3288112 \\ -\log 3 &= \overline{1},5228787 \\ \hline \log V &= 2,5479879 \end{aligned}\right\} V = 353^{mc},175. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 82.)

83. Soit ABCDEF le tronc donné. Soient B et E les sommets des bases. On demande le volume GACB.

Menons GO qui rencontre ACB en Q.

$$\text{vol. GACB} = \text{surf. ABC} \times \frac{1}{3}\text{GQ};$$

or

$$\text{surf. ABC} = \frac{\text{AB} \times \text{BC} \sin \text{ABC}}{2} = \frac{\sin 45^\circ}{18};$$

on a ainsi

$$\frac{\text{GQ}}{\text{GO}} = \frac{\text{AB}}{\text{DE}} = \frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{GQ}}{\text{GO} - \text{GQ}} = \frac{1}{2},$$

ou bien

$$\frac{\text{GQ}}{\text{QO}} = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \text{GQ} = 3;$$

donc

$$\text{vol. cherché} = \frac{\sin 45^\circ}{18} \times \frac{3}{3} = \frac{\sqrt{2}}{36} = 0^{\text{mc}},039. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 83.)

84 Surf. AMB = surf. OAMB — surf. BAO,

$$\text{surf. OAMB} = \frac{\pi R^2 N}{360} = \frac{\pi \times 689,75 \times 509238''}{1296000},$$

$$\text{surf. BAO} = \text{BO} \times \text{AO} \times \frac{\sin \text{BAO}}{2} = \frac{\overline{689,75}^2 \times \sin 141^\circ 27' 38''}{2};$$

calculs effectués, surf. OAMB = $587308^{\text{m}},1 = \text{S}$,
surf. BAO = $148210^{\text{m}},3 = \text{S}'$,

$$x = \text{S} - \text{S}' = 43^{\text{hect}}\,90^{\text{ares}}\,87^{\text{cent.}} \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 84.)

85.

$$\sin x = \frac{\sin 15}{15},$$

d'où

$$\log \sin x = \log \sin 15 - \log 15;$$

$$\log \sin 15 = \bar{1},4129962$$
$$-\log 15 = \bar{2},8239087$$
$$\log \sin x = \overline{\bar{2},2369049}$$
$$x = 0^\circ 59' 19'',19. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 85.)

86. $$\text{vol. ABC} = \text{surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AK},$$

$$\text{surf. BC} = \frac{\text{BC}}{2} \times 2\pi\,(\text{B}b + \text{C}c) = \text{BC} \times 2\pi\text{K}k.$$

Or, dans le triangle KAk, on a

$$\text{K}k = \text{A}k \sin(18^\circ + \text{CAK}) = \text{AK} \sin 48^\circ;$$

or

$$\text{AK} = \frac{\text{AC}\sqrt{3}}{2} = \frac{7{,}35\sqrt{3}}{2}.$$

On aura donc

$$\text{K}k = \frac{7{,}35\sqrt{3}}{2} \sin 48^\circ,$$

et par suite

$$\text{vol. ABC} = 7{,}35 \times \pi \times 7{,}35\sqrt{3} \sin 48^\circ \times \frac{7{,}35\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{7{,}35^3 \times \pi \times \sin 48^\circ}{2};$$

$$\begin{aligned} 3 \log 7{,}35 &= 2{,}5988619 \\ \log \pi &= 0{,}4971497 \\ \log \sin 48 &= \bar{1}{,}8710735 \\ -\log 2 &= \bar{1}{,}6989700 \\ \hline & \ 2{,}6660551 \end{aligned}$$

$$x = 463^{\text{mc}},557. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 86.)

87. Nous avons

$$\text{AD} = \sqrt{\text{BD} \times \text{DC}} = \sqrt{3{,}643 \times 4{,}928},$$

$$\text{tang B} = \frac{\text{AD}}{\text{BD}} = \frac{\sqrt{3{,}643 \times 4{,}928}}{4{,}928} = \sqrt{\frac{3{,}643}{4{,}928}},$$

$$\log \text{tang B} = \frac{1}{2}(\log 3{,}643 - \log 4{,}928);$$

$$\begin{aligned} \log 3{,}643 &= 0{,}5614592 \\ -\log 4{,}928 &= \bar{1}{,}3073293 \\ \hline & \ \bar{1}{,}8687885 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tang} B = \bar{1},9343942;$$

$$B = 40^\circ 41' 19'',43, \quad (S.)$$

$$C = 90^\circ - B = 49^\circ 18' 40'',57. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 87.)

88. On donne

$$\sin x + \cos x = 1,12378;$$

on en déduit

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1,12378;$$

appliquant la formule

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

il vient

$$2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 1,12378,$$

ou

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,12378;$$

or

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En effet, on sait que le sinus d'un arc est la moitié de la corde de l'arc double. Or la corde de l'arc $\frac{\pi}{2}$ n'est autre chose que le côté du carré inscrit, côté qui est égal à $\sqrt{2}$, en supposant le rayon du cercle $= 1$.

Donc on a

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,12378,$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1.12378}{\sqrt{2}}.$$

Calculs effectués par logarithmes, on trouve

$$x = 82^\circ 22' 46'',02. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 88.)

89. On a

$$\cos x + \cos(x + 30^\circ) = \frac{3}{2}.$$

Appliquant la formule

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

on trouve

$$2\cos(x + 15^\circ)\cos 15^\circ = \frac{3}{2}.$$

Or

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}};$$

mais

$$\cos 30^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 30\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

ainsi

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

$$\cos(x + 15^\circ) = \frac{3}{2 + \sqrt{3}},$$

$$\log\cos(x + 15^\circ) = \bar{1},8901175,$$

$$x + 15^\circ = 39^\circ 3' 45'',22,$$

$$x = 24^\circ 3' 45'',22.$$

Tous les angles demandés sont

$$2k\pi \pm 24^\circ 3' 45'',22. \quad (S.)$$

90. On a

$$\cos x + \cos\frac{x}{2} = 1,999;$$

or

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1;$$

donc

$$2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 2,999 = 0.$$

C'est donc une équation du second degré en $\cos\frac{x}{2}$ à résoudre.

On peut l'écrire

$$\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - 1,4995 = 0,$$

d'où

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 1,4995}.$$

Le radical est égal à 1,2498.

On voit que l'une des racines sera positive et l'autre négative. La racine positive sera

$$\frac{1}{4} + 1,2498 = 1,4998.$$

La racine négative sera

$$\frac{1}{4} - 1,2498 = 0,9998.$$

Or le cosinus d'un angle est au plus égal à 1; la racine positive doit donc être rejetée.

Quant à la valeur négative, comme sa valeur absolue est < 1, elle est admissible.

Appelons x' la valeur absolue de cette racine, on aura

$$\log\cos\frac{x'}{2} = \log 0,9998 = \bar{1},9999131,$$

d'où

$$\frac{x'}{2} = 1°8'46'' \quad \text{et} \quad x' = 2°17'32''.$$

Puisque la valeur de $\frac{x}{2}$ est négative, l'extrémité du plus petit arc correspondant à ce cosinus doit tomber dans le deuxième quadrant, et, comme on sait que

$$\cos(\pi - x) = -\cos x,$$

il s'ensuit que la plus petite valeur de l'angle cherché est

$$\alpha = 180° - 2°17'32'' = 177°42'28''.$$

Tous les angles correspondant à la question sont compris dans la formule

$$x = 2k\pi \pm 177°42'28''. \quad (S.)$$

91. Soient x et y les deux parties de l'angle de 45°, on a, d'après l'énoncé,

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}(x+y) = \operatorname{tang} 45^\circ,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} y} = \frac{5}{6}.$$

Ces deux équations nous feront connaître $\operatorname{tang} x$ et $\operatorname{tang} y$.

La première peut s'écrire

$$\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = 1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y,$$

en remarquant que

$$\operatorname{tang}(x+y) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y},$$

et que

$$\operatorname{tang} 45^\circ = 1.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang} x\,(1 + \operatorname{tang} y) = 1 - \operatorname{tang} y,$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{1 - \operatorname{tang} y}{1 + \operatorname{tang} y}.$$

Substituant cette valeur de $\operatorname{tang} x$ dans la deuxième équation, il vient

$$\frac{1 - \operatorname{tang} y}{1 + \operatorname{tang} y} = \frac{5}{6} \operatorname{tang} y,$$

d'où

$$6\,(1 - \operatorname{tang} y) = 5 \operatorname{tang} y\,(1 + \operatorname{tang} y),$$

$$5 \operatorname{tang}^2 y + 11 \operatorname{tang} y - 6 = 0,$$

$$\operatorname{tang} y = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 + 4 \times 6 \times 5}}{10} = \frac{-11 \pm 15{,}5242}{10}.$$

La racine négative n'est pas acceptable, parce qu'on sait que l'angle y étant compris entre 0° et 45°, sa tangente sera positive. Donc

$$\operatorname{tang} y = 0{,}45242,$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{1 - 0{,}45242}{1 + 0{,}45242} = \frac{0{,}54758}{1{,}45242}.$$

Pour avoir les angles, il faut d'abord calculer les logarithmes de $\operatorname{tang} x$ et $\operatorname{tang} y$, de sorte qu'il est même inutile de chercher la valeur de $\operatorname{tang} x$; il suffit de calculer son logarithme.

On a

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{1},5763554;$$

d'où

$$x = 20°39'25'',39. \quad (S.)$$

$$\log \operatorname{tang} y = \bar{1},6555418;$$

d'où

$$y = 24°20'34'',61. \quad (S.)$$

Remarque. Il y a une vérification qu'il est utile de faire pour voir si l'on n'a pas fait de fautes de calcul : c'est de voir si $x + y = 45°$. Or, si l'on additionne les valeurs de x et de y que nous avons calculées, on trouve bien que leur somme est 45°.

92. Supposons le problème résolu; soit AOB le triangle proposé; soit x l'angle AOB. Nous avons

$$\text{surf. AOB} = \text{AO} \times \text{OB} \times \frac{\sin x}{2} = \frac{R^2 \sin x}{2},$$

en désignant par R le rayon du cercle.

D'autre part, la surface du cercle vaut πR^2; on posera donc

$$\frac{R^2 \sin x}{2} = \frac{\pi R^2}{12},$$

d'où

$$\sin x = \frac{\pi}{6}.$$

On en conclut

$$\log \sin x = \log \pi - \log 6;$$

$$\log \pi = 0,4971497$$
$$-\log 6 = \bar{1},2218487$$
$$\log \sin x = \bar{1},7189984,$$
$$x = 31°34'26'',19. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 92.)

93. Soit ABCD le parallélogramme circonscrit, dont l'angle DAB $= \varphi$ et dont les points de contact avec le cercle sont E, H, K, L. Menons les deux droites HOL et EOK, nous décomposons ainsi le parallélogramme en quatre quadrilatères qui sont égaux deux à deux, savoir AEOH = CLOK et BHOK = DEOL.

L'aire du parallélogramme sera égale à la somme des aires de ces quatre quadrilatères.

Remarquons que, si l'on mène les droites OA, OB, OC, OD, on décompose chacun des quadrilatères en deux triangles égaux, de sorte que les quatre triangles AOE, AOH, OLC, OCK sont égaux chacun à chacun, et qu'il en est de même des quatre triangles DOE, DOL, BOH, BOK.

L'aire cherchée S est donc égale à quatre fois l'aire du triangle AOE, plus quatre fois l'aire du triangle DOE.

Or l'aire AOE est

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{OE}\times\mathrm{AE}=\frac{1}{2}\,\alpha^2\cot\frac{\varphi}{2},$$

puisque, le triangle AOE étant rectangle en E, on a

$$\mathrm{AE}=\mathrm{OE}\cot\mathrm{EA}=\alpha\cot\frac{\varphi}{2}.$$

On verrait de la même manière, et en remarquant en outre que l'angle ADC est le supplément de l'angle DAB $=\varphi$, que l'aire DOE est

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{OE}\times\mathrm{DE}=\frac{1}{2}\,\alpha^2\cot\frac{\pi-\varphi}{2};$$

donc

$$\mathrm{S}=4\left(\frac{1}{2}\,\alpha^2\cot\frac{\varphi}{2}\right)+4\left(\frac{1}{2}\,\alpha^2\cot\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$

$$=2\,\alpha^2\left(\cot\frac{\varphi}{2}+\cot\frac{\pi-\varphi}{2}\right).$$

Pour calculer la valeur de l'angle φ dans le cas où la surface est minimum, mettons la valeur de S sous la forme

$$\mathrm{S}=2\alpha^2\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}\times\sin\frac{\pi-\varphi}{2}}=\frac{2\alpha^2}{\sin\frac{\varphi}{2}\times\sin\frac{\pi-\varphi}{2}}.\qquad(\mathrm{S.})$$

Il suffit pour cela d'appliquer la relation

$$\cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a-\sin b},$$

qu'on trouve immédiatement, en remarquant que

$$\cot a+\cot b=\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\sin a\times\sin b}.$$

Pour que S soit minimum, il faut évidemment que

$$\sin\frac{\varphi}{2}\times\sin\frac{\pi-\varphi}{2}$$

soit maximum, puisque le numérateur de la valeur de S est constant. Or

$$\sin\frac{\varphi}{2}\times\sin\frac{\pi-\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{2}\right].$$

Or, comme $\cos\frac{\pi}{2}=0$, il suffit de trouver le maximum de

$$\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

qui aura lieu lorsque

$$\varphi-\frac{\pi}{2}=0,\quad \text{ou}\quad \varphi=\frac{\pi}{2}=90^\circ.\quad (S.)$$

Ainsi il faut que l'angle φ soit égal à 90° pour que la surface du parallélogramme soit minimum, autrement dit que le parallélogramme soit devenu un carré. (*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 93.)

94. Pour résoudre commodément l'équation générale

$$(1)\qquad a\sin x+b\cos x=c,$$

on prend un arc auxiliaire φ compris -90° et $+90^\circ$, et tel que l'on ait

$$\tang\varphi=\frac{b}{a};$$

remplaçant b par $a\tang\varphi$, l'équation proposée devient

$$(2)\qquad \cos(x-\varphi)=\frac{c.\cos\varphi}{a}.$$

La condition de possibilité du problème est que la valeur absolue de

$$\frac{c.\cos\varphi}{a}$$

soit inférieure à l'unité, c'est-à-dire que

$$\frac{c^2.\cos^2\varphi}{a^2}<1,$$

ou, en remplaçant $\cos^2\varphi$ par sa valeur tirée de (2),

$$c^2 < a^2 + b^2. \tag{3}$$

Lorsque cette condition sera satisfaite, on trouvera dans les Tables un angle ε, compris entre 0° et 180°, dont le cosinus sera

$$\frac{c.\cos\varphi}{a}.$$

D'après la formule qui fait connaître tous les angles correspondant à un cosinus donné, la solution complète sera

$$x = n.360^\circ + \varphi \pm \varepsilon, \tag{4}$$

n représentant un nombre entier arbitraire, positif, nul ou négatif. Ici

$$a = 357915, \quad b = 193878, \quad c = 222336;$$

donc on a

$$c < a,$$

donc (3) est satisfaite. On trouve

$$\varphi = 28^\circ 26' 37'',83,$$
$$\varepsilon = 56^\circ 53' 33'',50;$$

donc

$$x = n.360^\circ + 28^\circ 26' 37'',83 \pm 56^\circ 53' 33'',50. \quad (S.)$$

95. On a

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \quad (S.)$$

Le facteur $2\sin\frac{\pi}{4}$ étant indépendant de x, le maximum demandé correspond à celui de $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. Ce maximum a évidemment lieu lorsque $x = \frac{\pi}{4}$. L'expression donnée prend alors la valeur

$$2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

D'après les formules qui font connaître tous les arcs correspondant à une même ligne trigonométrique donnée, la solution

complète du problème est donnée par les deux expressions

$$x + 2n\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

où n désigne un entier positif, nul ou négatif.

On peut d'ailleurs traiter la question à la manière ordinaire, en considérant $\sin x$ et $\cos x$ comme deux variables assujetties à l'équation

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

96. Menons par le sommet B les droites BB′, BB″, respectivement parallèles aux côtés DA, DC. Le triangle BCB′ donne

$$BB' = BC\frac{\sin C}{\sin D}, \quad B'C = BC\frac{\sin(C+D)}{\sin D}.$$

Par suite, on connaîtra

$$BB'' = CD + CB',$$
$$AB'' = AD - BB',$$

et le triangle AB″B sera déterminé.

On trouve

$$BB' = 58^m,9905,$$
$$B'C = 81^m,0762,$$

et par suite

$$BB'' = 224^m,3952,$$
$$AB'' = 164^m,2245.$$

Il reste à calculer le côté AB du triangle ABB″, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris.

Posons

$$AB'' = b, \quad BB'' = a, \quad ABB'' = B, \quad BAB'' = A,$$

nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(A - B\right) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{D}{2},$$

$$AB = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}.$$

On trouve

$$\frac{A - B}{2} = 5^\circ 5' 23'',58,$$

et par suite

$$AB = 338^m,177427. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 96.)

97. On a

$$\cos 2x = \cos x + 1.$$

Or

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$

donc

$$2\cos^2 x - \cos x - 2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Or $\frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ est supérieur à 1; ce n'est donc pas une valeur admissible pour un cosinus, et nous ne garderons que la valeur

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} = -0,7807,$$

d'où l'on déduit pour x les deux valeurs

$$x_1 = 99^\circ 32' 14'',7, \quad (S.)$$
$$x_2 = 260^\circ 27' 45'',3. \quad (S.)$$

98. L'arc de 75 degrés est la somme des arcs de 30 degrés et de 45 degrés, dont il est facile de déterminer géométriquement les sinus et cosinus. En effet,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\sin 30^\circ$ est la moitié du côté de l'hexagone régulier (le rayon étant l'unité); donc on a

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

on en déduit

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cela posé,

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1),$$

$$\sin 75^\circ = 0{,}96, \quad (\text{S.})$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = 0{,}25, \quad (\text{S.})$$

$$\tang 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2+\sqrt{3} = 3{,}732. \quad (\text{S.})$$

99. J'appelle x le nombre demandé et R le rayon du cercle. J'ai

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{corde}(\text{arc}\,x)}{\text{R}};$$

or, d'après l'énoncé,

$$\text{corde}(\text{arc}\,x) = \frac{2}{3} \cdot 2\text{R};$$

donc

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{2}{3},$$

d'où je tire

$$\log\sin\frac{x}{2} = \left\{\begin{array}{r} \log 2 = 0{,}30103000 \\ -\log 3 = \bar{1}{,}52287875 \\ \hline \log\frac{x}{2} = \bar{1}{,}82390875 \end{array}\right.$$

$$\frac{x}{2} = 41^\circ 48' 37'',16 \quad \text{et} \quad x = 83^\circ 37' 14'',32. \quad (\text{S.})$$

100. En désignant par α l'angle TAO, qui est donné égal à 1 minute, le triangle rectangle TAO donne

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{d},$$

d'où l'on conclut, pour le rapport cherché,

$$x = \frac{d}{\gamma} = \frac{1}{\sin 30''}.$$

Les tables donnent

$$x = 6875{,}493. \quad (\text{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 100.)

101. Une zone a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle. Dans le cas actuel, cette zone est divisée en deux portions égales par le plan central parallèle aux bases. Si donc on pose

$$\alpha = 23^\circ 27' 32'',$$

on aura pour expression de la surface de la zone torride

$$z = 2\pi R \times 2R \sin\alpha = 4\pi R^2 \sin\alpha,$$

(car le triangle OIA donne $OI = \frac{h}{2} = R \sin\alpha$).

La surface de la sphère a pour expression

$$s = 4\pi R^2.$$

On a donc

$$\frac{z}{s} = \sin\alpha = 0.398087. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 101.)

102. La quantité

$$x = \tang a + \sec a$$

se transforme en la suivante, plus commode pour le calcul logarithmique :

$$x = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{1}{\cos a} = \frac{1 + \sin a}{\cos a} = \frac{\sin 90^\circ + \sin a}{\cos a},$$

ou enfin

$$x = \frac{2 \sin\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{\cos a} = \frac{2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{\cos a}.$$

On a d'ailleurs

$$45^\circ - \frac{a}{2} = 32^\circ - 42' - 6'',5.$$

Le calcul se fait dès lors très-facilement. On a en effet

$$\log x = \log 2 + 2 \log \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) + C^l \log \cos a - 10;$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$2 \log \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \bar{1},8501018$$

$$C^l \log \cos a - 10 = 0,0413108$$

$$\log x = 0,1924426$$

d'où

$$x = 1,55755.$$

Pour calculer la quantité

$$y = \tang\left(\frac{a}{2} + 45^\circ\right),$$

remarquons que

$$\tang\left(\frac{a}{2} + 45^\circ\right) = \cot\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right);$$

donc

$$\log y = \log \cot\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = 0,1924426,$$

d'où

$$y = x = 1,55755. \quad (S.)$$

Il est d'ailleurs très-facile de voir *à priori* que les deux quantités à calculer sont égales. On a en effet

$$\tang a + \text{séc.}\, a = \frac{2 \sin\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{\cos a}.$$

Ajoutons au dénominateur $\cos 90^\circ$ qui est nul, il viendra

$$\tang a + \text{séc}\, a = \frac{2 \sin\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{\cos 90^\circ + \cos a}$$

$$= \frac{2 \sin\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}{2 \cos\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)},$$

ou en définitive

$$\tang a + \text{séc}\, a = \tang\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right).$$

103. En désignant par x l'une des parties, l'autre sera

$$45^\circ - x,$$

et l'on aura

$$\frac{\tang x}{\tang(45^\circ - x)} = \frac{2}{3}.$$

Or

$$\tang(45^\circ - x) = \frac{\tang 45^\circ - \tang x}{1 + \tang 45^\circ \tang x} = \frac{1 - \tang x}{1 + \tang x}.$$

On a donc

$$\operatorname{tang} x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} x},$$

d'où l'équation du second degré

$$\operatorname{tang}^2 x + \frac{5}{3} \operatorname{tang} x - \frac{2}{3} = 0,$$

qui donne

$$\operatorname{tang} x = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{2}{3}} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{24}{36}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}.$$

La première racine est $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$; la seconde, qui est $-\frac{12}{6}$ ou -2, ne peut convenir au problème tel qu'il est posé.

L'arc x, qui a pour tangente $\frac{1}{3}$, s'obtient facilement à l'aide des tables. En effet,

$$\log \operatorname{tang} x = \mathrm{C}^{\circ} \log 3 - 10 = \bar{1},5228787.$$

On en conclut

$$x = 18^{\circ}26'5'',8, \quad \text{(S.)}$$

et par suite

$$45^{\circ} - x = 26^{\circ}33'54'',2. \quad \text{(S.)}$$

104. On a

$$a = \mathrm{OM} \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$b = \mathrm{O'M} \sin \frac{\alpha}{2};$$

d'où

$$a - b = \sin \frac{\alpha}{2} (\mathrm{OM} - \mathrm{O'M}).$$

Mais

$$\mathrm{OM} - \mathrm{O'M} = \mathrm{OO'} = a + b;$$

donc

$$a - b = \sin \frac{\alpha}{2} (a + b),$$

ce qui donne

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Or on a, en général,

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

d'où

$$\sin\alpha = 2\frac{a-b}{a+b}\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2} = 2\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{4ab}{(a+b)^2}},$$

ou enfin

$$\sin\alpha = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 104.)

7° RÉSOLUTIONS DES TRIANGLES.

105. Désignons par a, b, c les trois côtés du triangle, par p son demi-périmètre, par h la hauteur cherchée; on a les deux expressions suivantes de la surface S:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$h = 76^m,80. \quad (S.)$$

106. Appelons α l'angle correspondant à la corde AB, a la corde sous-tendant l'arc AB, b la corde sous-tendant l'angle 2α, R le rayon cherché; on a à résoudre les deux équations

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R},$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{2R},$$

d'où l'on tire

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2a}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha}{2} = 51^\circ 1' 23''.$$

La première équation donne alors

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = 2^m,1037 4. \quad (S.)$$

107. Nous aurons, en appelant x la corde cherchée,

$$x = 2 \times 542,35 \times \sin 18^\circ 51' 30'',$$

$$x = 350^m,6. \quad (S.)$$

108. Soient ABCD le losange, BD la diagonale donnée; on a

$$BD = 2\,BA \sin\frac{1}{2}A,$$

$$\sin\frac{1}{2}A = \frac{BD}{2BA}.$$

Or 2BA n'est autre chose que le demi-périmètre donné, ce qui permet de calculer

$$A = 25^\circ 19' 23'',$$

$$B = 180^\circ - A = 154^\circ 40' 37''. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 108.)

109. AD étant la hauteur du trapèze,

$$S = \frac{AB + CD}{2} \times AD.$$

Menons par le point D une parallèle DE à CB; le triangle ADE donne

$$AD = AE \tang DEA.$$

L'angle DEA est égal à l'angle B; ainsi

$$AD = AE \tang B;$$

mais

$$AE = AB - EB = AB - CD.$$

On a donc pour la valeur S

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)(AB - CD)\tang B,$$

$$S = 19640^{mq},60. \quad (S.)$$

110. Appelons les trois côtés a, b, c, et la hauteur h. Nous avons

$$A = 180^\circ - (B + C) = 36^\circ\, 25'\, 20''.$$

Cela posé, les triangles rectangles ABH, AHC donnent

$$h = b \sin C,$$
$$h = c \sin B,$$

d'où

$$b = \frac{h}{\sin C} = 153^m,318, \quad (S.)$$

$$c = \frac{h}{\sin B} = 159^m,340. \quad (S.)$$

Enfin le triangle ABC donne la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = 97^m,87. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 110.)

111. Soient $2a$ la base, h la hauteur et S la surface; on a

$$h = \frac{S}{a}$$

et

$$\tang \frac{1}{2} A = \frac{a}{h} = \frac{a^2}{S},$$

$$\frac{1}{2} A = 26^\circ\, 36'\, 20'',$$

$$A = 53^\circ\, 52'\, 40''. \quad (S.)$$

112. En calculant A et appelant α, β les deux parties dans lesquelles AD divise cet angle, on aurait les formules

$$\alpha + \beta = A,$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD}{\frac{1}{2} BC} = \frac{\sin B}{\sin \alpha},$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AD}{\frac{1}{2} BC} = \frac{\sin C}{\sin \beta},$$

qui permettraient de calculer AD; mais il est facile de voir que le triangle proposé est rectangle (les trois côtés sont entre eux comme 3, 4 et 5); dès lors, on sait que AD est égal à la moitié de l'hypoténuse

$$AD = 1292^m,50. \quad (S.)$$

113. Appelons a, b, c les trois côtés et x la longueur AD; nous aurons

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin B}{\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A},$$

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

De ces formules on tire la valeur de x en fonction des données, et le calcul donne

$$x = 53791^m,679. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* **113.**)

114. Désignons par c le côté AB, par b le côté AC, et par A l'angle donné; soit x la bissectrice inconnue. Les triangles AOB, AOC donnent

$$\overline{BO}^2 = x^2 + c^2 - 2cx \cos\frac{1}{2}A,$$

$$\overline{OC}^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cos\frac{1}{2}A;$$

d'où l'on déduit, en prenant le rapport et en remarquant que le rapport des segments du troisième côté est égal au rapport des deux autres côtés,

$$\frac{\overline{BO}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{x^2 + c^2 - 2cx \cos\frac{1}{2}A}{x^2 + b^2 - 2bx \cos\frac{1}{2}A}.$$

Simplifiant, après avoir chassé les dénominateurs,

$$(c+b)\,x - 2bc\cos\frac{1}{2}\,A = 0,$$

$$x = \frac{2bc\cos\frac{1}{2}A}{c+b} = 19^{m},431. \quad (S.)$$

115. Soit α l'angle cherché, a la longueur de l'arc qui lui correspond dans le cercle de rayon 1, R le rayon du cercle donné et S la surface du secteur.

$$S = \frac{1}{2}R\,a,$$

$$a = \frac{2S}{R} = 2,8.$$

Pour avoir α, il suffit de poser la proportion

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{2,8}{\pi R},$$

$$\alpha = 32^{\circ}5'8'',52. \quad (S.)$$

116. Il est facile de calculer les longueurs BI et CI, qui sont proportionnelles à BA et CA.

$$BI = \frac{30}{7},$$

$$CI = \frac{12}{7}.$$

Cela fait, IM est donné par la proportion

$$\frac{IM}{AC} = \frac{BI}{BC},$$

$$IM = \frac{10}{7}.$$

Les deux triangles partiels, ayant même hauteur, sont proportionnels à leurs bases BI et CI; il suffit donc de diviser

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

en deux parties proportionnelles à 30 et 12, et l'on trouve, tout calcul fait,

$$BAI = 3^{mq},3455, \quad (S.)$$
$$CAI = 1^{mq},3382. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 116.)

117. Nous avons

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{BC \sin APB}{AB \sin BPC} = 0,811089,$$

$$\frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A} = \frac{0,188911}{1,811089} = \frac{\tang \frac{1}{2}(C - A)}{\tang \frac{1}{2}(C + A)}.$$

Or nous savons quelle est la valeur de A + C, par conséquent de

$$\frac{A + C}{2} = 61°22'23'';$$

nous pouvons alors calculer

$$\frac{1}{2}(C - A) = 10°49'6'',$$

$$C = 72°11'29'', \quad (S.)$$
$$A = 50°33'17''. \quad (S.)$$

118. Le triangle PAB donne

$$PA = AB \times \frac{\sin PBA}{\sin BPA} = 3818,88;$$

de même le triangle QAB,

$$QA = AB \times \frac{\sin QBA}{\sin AQB} = 5078,46.$$

Dans le triangle PQA, on connaît donc deux côtés PA, QA et l'angle PAQ, différence de deux angles donnés (on rentre dans la résolution d'un triangle, connaissant b, c, A).

Le calcul donne pour PQ

$$PQ = 3257^{m},3.$$

119. Données a, B, C.
Dans ce cas, on a

$$A = 180^\circ - (B + C) = 55^\circ 49' 22'', \quad (S.)$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)} = 32^m,2482, \quad (S.)$$

$$C = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)} = 41^m,4137, \quad (S.)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)} = 552^{mq},440886. \quad (S.)$$

120. Données b, c, A.
Pour calculer S, on a

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = 18^{ares},1042.$$

121. Données c, a, A.

Calcul de C	$\sin C = \frac{C \sin A}{a}$	$C_1 = 26^\circ 38' 3'',11$	(S.
		$C_2 = 153^\circ 21' 56'',89$	(S.)
Calcul de B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B_1 = 128^\circ 4' 18'',89$	(S.)
		$B_2 = 1^\circ 20' 25'',11$	(S.)
Calcul de b	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$b_1 = 181^m,544$	(S.)
		$b_2 = 5^m,394$	(S.)

122. Données a, b, c.
Les formules sont

$$\tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{p(p - b)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)}},$$

d'où

$$A = 36^\circ 53' 15'', \quad (S.)$$
$$B = 53^\circ 6' 45'', \quad (S.)$$
$$C = 90^\circ. \quad (S.)$$

Il était facile de reconnaître que le triangle proposé était rec-

tangle, car il est semblable à celui dont les trois côtés sont 3, 4, 5; en effet

$$c = 31790 = 6358 \times 5,$$
$$b = 25432 = 6358 \times 4,$$
$$c = 19074 = 6358 \times 3.$$

123. On sait que la surface d'un triangle est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

d'où l'on tire

$$\sin A = \frac{2S}{bc}.$$

$$A = 45^\circ 48' 8'',43. \quad (S.)$$

124. La question proposée revient à calculer B et b dans un triangle, connaissant A, a, c et S (surface). On a immédiatement

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

d'où

$$b = \frac{2S}{c \sin A} = 174^m,5667. \quad (S.)$$

Et d'ailleurs

$$\frac{1}{2}(B + C) = 90^\circ - \frac{1}{2} A = 67^\circ 50' 54'',$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B - C) = \cot \frac{A}{2} \left(\frac{b - c}{b + c}\right),$$

$$\frac{1}{2}(B - C) = 30^\circ 29' 52'',53;$$

donc

$$B = 98^\circ 20' 46'',53. \quad (S.)$$

125. Soit AB la corde donnée, appelons x l'angle cherché; dans le triangle AOC, on a

$$AC = AO \sin AOC,$$

$$\frac{2}{3} R = R \sin \frac{1}{2} x,$$

$$\sin \frac{1}{2} x = \frac{2}{3},$$

$$x = 83^\circ 37' 14'',22. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 125.)

126. Soit le triangle inscrit ABC. Menons par le point A le diamètre AOD, et joignons BD: l'angle en D du triangle rectangle ABD est égal à l'angle C. On a donc

$$C = 2R \sin C,$$

$$R = \frac{C}{2 \sin C}.$$

Multipliant haut et bas par ab,

$$R = \frac{abc}{2ab \sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S},$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Remplaçant a, b, c par leurs valeurs numériques,

$$R = 207^m,50. \quad (S.)$$

Il est à remarquer que cette valeur montre que ABC est rectangle; en effet, les trois côtés sont entre eux comme 3, 4, 5 (*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 126.)

127. Données

$$\log c, \quad \log b, \quad A.$$

Nous savons qu'on a

$$B + C = 180^\circ - A,$$

$$\frac{1}{2}(B + C) = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(B - C)}{\tang \frac{1}{2}(B + C)} = \frac{b - c}{b + c} = \frac{1 - \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{b}};$$

et, si nous posons $\frac{c}{b} = \tang \varphi$,

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(B - C)}{\tang \frac{1}{2}(B + C)} = \frac{1 - \tang \varphi}{1 + \tang \varphi}$$

$$= \frac{\tang 45^\circ - \tang \varphi}{1 + \tang 45^\circ \tang \varphi} = \tang(45^\circ - \varphi),$$

$$\tang \frac{1}{2}(B - C) = \cot \frac{A}{2} \tang(45^\circ - \varphi).$$

Le calcul donne

$$B = 0^\circ 22' 36'',75, \quad (S.)$$
$$C = 109^\circ 15' 54'',75. \quad (S.)$$

Le côté a s'obtient au moyen de la formule

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = 1864^m,016. \quad (S.)$$

La surface nous est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = 1145^{m q},49. \quad (S.)$$

128. Données

$$HD = d,$$
$$HBD = \alpha,$$
$$B.$$

Nous avons

$$BH = d \cot \alpha;$$

puis, dans les triangles ABH, BHC, nous évaluons facilement les deux parties de AC :

$$AH = BH \tang\left(\frac{B}{2} - \alpha\right),$$

$$HC = BH \tang\left(\frac{B}{2} + \alpha\right),$$

$$AH + HC = b = d \cot \alpha \left[\tang\left(\frac{B}{2} - \alpha\right) + \tang\left(\frac{B}{2} + \alpha\right)\right],$$

$$b = \frac{d \cot \alpha \sin B}{\cos\left(\frac{B}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{B}{2} + \alpha\right)}.$$

Pour calculer a et c, on emploiera les mêmes triangles rectangles, qui donnent

$$BH = d, \quad \cot\alpha = a, \quad \sin C = C \sin A.$$

Or les angles C et A sont donnés immédiatement, car l'angle BDH extérieur au triangle BDC est, d'un autre côté, le complément de α; ainsi

$$90^\circ - \alpha = C + \frac{B}{2},$$

$$C = 90^\circ - \alpha - \frac{B}{2}, \quad (S.)$$

et d'autre part

$$A = 90^\circ + \alpha - \frac{B}{2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 128.)

129. CALCUL DE A.

$$A = 180 - (B + C).$$

B =	48° 52′ 13″	179° 59′ 60″
C =	75° 18′ 25″	124° 10′ 38″
B + C =	124° 10′ 38″	55° 49′ 22″

$$A = 55^\circ\, 49'\, 22''. \quad (S.)$$

CALCUL DE b.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A.$$

$$\begin{aligned} \log A &= 1{,}5492486 \\ \log \sin B &= \bar{1}{,}8769176 \\ \text{p. } 3'' &= \ldots\ldots\ldots 55 \\ -\log \sin A &= 0{,}0823349 \\ \hline \log b &= 1{,}5085066 \\ b &= 32{,}2483. \quad (S.) \end{aligned}$$

CALCUL DE c.

$$\frac{C}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \qquad C = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A,$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1,5492486 \\ \log \sin c &= \bar{1},9855578 \\ \text{p. } 5'' &= \ldots\ldots 28 \\ -\log \sin A &= 0,0823349 \\ \hline \log c &= 1,6171441 \\ c &= 41,4137. \quad \text{(S.)} \end{aligned}$$

CALCUL DE LA SURFACE S.

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C - \log \sin A - \log 2.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1,5492486 \\ \log \sin B &= \bar{1},8769176 \\ \text{p. } 3'' &= \ldots\ldots 55 \\ \log \sin C &= \bar{1},9855578 \\ \text{p. } 5'' &= \ldots\ldots 28 \\ -\log \sin A &= 0,0823349 \\ -\log 2 &= \bar{1},6989700 \\ \hline \log S &= 2,7402858 \\ S &= 552^{\text{mq}},4408. \quad \text{(S.)} \end{aligned}$$

130. CALCUL DES ANGLES B ET C.

$$\tang \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2},$$

$$\frac{B - C}{2} = 5^\circ\, 11'\, 55'',89,$$

$$90 - \frac{A}{2} = \frac{B + C}{2} = 53^\circ\, 11'\, 16'';$$

d'où

$$B = 59^\circ 26' 11'',89, \quad (S.)$$
$$C = 47^\circ 56' 20'',11. \quad (S.)$$

CALCUL DE a.

$$a = \frac{b + c \sin \frac{A}{2}}{\cos (B - C)} = 125^m,011. \quad (S.)$$

CALCUL DE LA SURFACE.

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = 5234^{mq},14.$$

131. CALCUL DES ANGLES C ET B.

$$\operatorname{tang} \frac{C - B}{2} = \frac{c - b}{c + b} \cot \frac{A}{2}.$$

Pour rendre $\frac{c-b}{c+b}$ calculable par logarithmes, je divise haut et bas cette fraction par c; il vient

$$\frac{1 - \frac{b}{c}}{1 + \frac{b}{c}}.$$

Je pose $\frac{b}{c} = \operatorname{tang} \varphi$; il vient

$$\frac{1 - \frac{b}{c}}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{1 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi} = \frac{\operatorname{tang} 45^\circ - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} 45^\circ \operatorname{tang} \varphi} \operatorname{tang} (45^\circ - \varphi),$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{tang} \frac{C - B}{2} = \operatorname{tang} (45^\circ - \varphi) \cot \frac{A}{2}.$$

Calcul de l'angle auxiliaire φ.

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{c},$$

$$\log\operatorname{tang}\varphi = \log b - \log c,$$

$$\log b = 1,1159263$$
$$\log c = 3,2714872$$
$$\log\operatorname{tang}\varphi = \bar{3},8444391,$$

$$\varphi = 0^\circ 24' 1'',64,$$
$$45\varphi = 44^\circ 35' 58'',36.$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{C-B}{2} = \log\operatorname{tang} 44^\circ 35' 58'',36 + \log\cot 34^\circ 55' 44'',25,$$

$$\log\operatorname{tang} 44^\circ 35' 58'',36 = \bar{1},9939288$$
$$\log\cot 34^\circ 55' 44'',25 = 0,1559197$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{C-B}{2} = 0,1498485$$

$$\frac{C-B}{2} = 54^\circ 41' 38'',94.$$

On a, d'ailleurs

$$\frac{C+B}{2} = 90 - \frac{A}{2} = 55^\circ 4' 15'',75;$$

d'où l'on conclut

$$C = 109^\circ 43' 54'',69, \quad (S.)$$
$$B = \quad 0^\circ 22' 36'',81. \quad (S.)$$

Calcul de A.

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

$$\log = \log c + \log\sin A - \log\sin C.$$

$$\log C = 3,2714872$$
$$\log\sin A = \bar{1},9725922$$
$$-\log\sin c = 0,0263705$$
$$\log a = 3,2704499.$$

CALCUL DE LA SURFACE.

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = 1163^{mq},4. \quad (S.)$$

132. CALCUL DE C.

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

$$C = 26°38'3'',09,$$

$$180 - C = C' = 153°21'56'',91.$$

Discussion. — Les deux angles C et C′ ont le même sinus. Il s'agit de reconnaître si ces deux angles conviennent tous deux à la question.

La construction géométrique du triangle va nous l'apprendre.

Je fais un angle BAC = l'angle donné A. Je prends AB = c. Du point B comme centre avec a comme rayon, je décris un arc de cercle; il coupera la ligne AC, si $a >$ BD perpendiculaire abaissée du point B.

Or BD, dans le triangle BAD, vaut $c \sin A$,

$$\log c = 2,0144365$$
$$\log \sin A = \bar{1},6306936$$
$$1,6451301$$
$$BD = 44^{m},170.$$

Donc $a >$ BD. La circonférence décrite de B comme centre avec a comme rayon rencontrera donc AC en deux points C et C′. Comme d'ailleurs $a < c$, ces deux points seront situés tous les deux à droite du point A, et, par conséquent, si je joins BC et BC′, les deux triangles ABC et ABC′ conviendront à la question. Les deux valeurs C et C′ conviennent donc pour l'angle C.

CALCUL DE L'ANGLE B.

$$B = 180 - (A + C).$$

Si je remplace dans cette formule successivement C par ses

deux valeurs, j'obtiendrai deux solutions B et B′ qui seront

$$B = 180 - 51^\circ 55' 41'',09 = 128^\circ\ 4' 18'',91,$$
$$B' = 180 - 178^\circ 39' 34'',91 = 1^\circ 20' 25'',09.$$

CALCUL DU CÔTÉ b.

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A.$$

Si je remplace dans cette formule successivement B par ses deux valeurs, j'aurai pour le côté cherché deux solutions b et b' qui seront données par les relations

$$\log b = \log 98,53 + \log \sin 128^\circ\ 4' 18'',91 - \log \sin 25^\circ\ 17' 38'',$$
$$\log b' = \log 98,53 + \log 1^\circ\ 20' 25'',09 - \log \sin 25^\circ\ 17' 38''.$$

Première solution.

$$\begin{aligned} \log 98,53 &= 1,9935685 \\ \log \sin 128^\circ 4' 18'',91 = \log \sin 51^\circ 55' 41'',09 &= \bar{1},8961056 \\ - \log \sin 25^\circ\ 17' 38'' &= 0,3693064 \\ \hline & \quad 2,2589805 \\ b &= 181^m,543. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 98,53 &= 1,9935685 \\ \log \sin 1^\circ\ 20' 25'',09 &= \bar{2},3690404 \\ - \log \sin 25^\circ\ 17' 38'' &= 0,3693064 \\ \hline & \quad 0,7319153 \\ b' &= 5^m,394. \end{aligned}$$

Vérification.

$$AD = \frac{b + b'}{2} = AB \cos A = c \cos A,$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2,0144365 \\ \log \cos A &= \bar{1},9562299 \\ \hline & \quad 1,9706664 \end{aligned}$$

$$\frac{b + b'}{2} = 93^m,468 - c \cos A = 93^m,468.$$

Les solutions seront donc

Première solution.	*Deuxième solution.*
$c = 26°38'\ 3'',09$, (S.)	$c' = 153°21'56'',91$, (S.)
$B = 128°\ 4'18'',91$, (S.)	$B' = 1°20'25'',09$, (S.)
$b = 181^m,543$. (S.)	$b' = 5^m,394$. (S.)

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 132.)

133. On a

$$\operatorname{tang} C = \frac{c}{b} = \cot B;$$

d'autre part, AD étant bissectrice de l'angle A, on a

$$\frac{BD}{DC} = \frac{4,319}{5,238} = \frac{c}{b}.$$

On en conclut donc

$$\operatorname{tang} C = \frac{4,319}{5,238} = \cot B.$$

$$\log \cot B = \log \operatorname{tang} C = \left\{ \begin{array}{l} \log 4,319 = 0,6353832 \\ -\log 5,238 = \bar{1}.2809174 \end{array} \right.$$

$$\log \cot B = \log \operatorname{tang} c = \overline{1,9163006}$$

$$C = 39°\ 30'\ 45'',71, \quad (S.)$$
$$B = 50°\ 29'\ 14'',29. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 133.)

134. On a

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-c)}},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

(Voir la démonstration de ces formules dans un Traité de Trigonométrie.)

Dans notre exemple, on a

$$p = 12^m,$$
$$p - a = 6,$$
$$p - b = 4,$$
$$p - c = 2.$$

CALCUL DE A.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{4 \times 2}{6 \times 12}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3},$$
$$\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}A = -\log 3 = \bar{1},5228787,$$
$$\tfrac{1}{2}A = 18°26'5'',81,$$
$$A = 36°52'11'',63. \quad (S.)$$

CALCUL DE B.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}B \sqrt{\frac{12}{48}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$
$$\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}B = -\log 2 = \bar{1},6989700,$$
$$\tfrac{1}{2}B = 26°33'54'',18,$$
$$B = 53°\ 7'48'',37. \quad (S)$$

CALCUL DE C.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{24}{24}} = 1,$$
$$\tfrac{1}{2}C = 45°,$$
$$C = 90°. \quad (S.)$$

Remarque. — On pourrait voir *à priori* que le triangle est rectangle, car les côtés 6, 8 et 10 sont proportionnels à 3, 4 et 5.

135. Surf. ACBD = 4, surf. AOD = 2R × AD.

Or

$$AD = AT + DT.$$

On évalue séparément AT, DC, au moyen des formules

$$b = c\,\text{tang}B \quad \text{ou} \quad b = c\,\text{cot}C, \ldots.$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 135.)

136. Désignons par X le volume demandé, et du point B abaissons la perpendiculaire BC sur OA. On a

$$X = 2\pi . OA . AC . \frac{OA}{3} = \frac{2}{3}\pi . \overline{OA}^2 . AC,$$

$$AC = OA - OC = OA - OB \cos AOB = OA\,(1 - \cos AOB),$$

$$AC = 2 . OA \sin^2 \frac{AOB}{2},$$

et par conséquent

$$X = \frac{4}{3}\pi . \overline{OA}^3 \sin^2 \frac{AOB}{2},$$

c'est-à-dire, conformément aux données de la question,

$$\frac{X}{1^{mc}} = \frac{4}{3}\pi\,(7,34)^3 \sin^2 \frac{55^\circ}{2}.$$

Cette dernière formule donne

$$\log \frac{X}{1^{mc}} = \left\{ \begin{array}{r} \log 4 = 0,6020600 \\ \log \pi = 0,4971497 \\ 3 \log 7^\circ,34 = 2,5970883 \\ 2 \log \sin 27^\circ 30' = \bar{1},3288112 \\ -\log 3 = \bar{1},5228787 \\ \hline \log \frac{X}{1^{mc}} = 2,5479879, \end{array} \right.$$

$$\frac{X}{1^{mc}} = 353,175,$$

$$X = 353^{mc},175. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 136.)

137. $$\operatorname{Sin} x = \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\log \sin x = \log 2 + \log \frac{p+q}{2} + \log \frac{p-q}{2}.$$

On a

$$p+q=45^\circ 6' 41'',$$

$$\frac{p+q}{2}=22^\circ 33' 20'',5,$$

$$p-q=11^\circ 32' 33'',8,$$

$$\frac{p-q}{2}=5^\circ 46' 16'',9,$$

$$\log 2=0,3010300$$

$$\log\sin\frac{p+q}{2}=\bar{1},5838574$$

$$\log\cos\frac{p-q}{2}=\bar{1},9977930$$

$$\log\sin x=\overline{\bar{1},8826570}$$

$$x=49^\circ 45' 13'',2. \quad (S.)$$

138. 1° En considérant le triangle ADE, on a

$$\frac{DE}{AD}=\frac{\sin A}{\sin E}=\frac{\sin A}{\sin(A+x)},$$

par suite

$$(1) \qquad DE=AD\frac{\sin A}{\sin(A+x)}. \quad (S.)$$

2° La formule (1) montre que la longueur DE sera la plus petite possible lorsque $\sin(A+x)$ aura la plus grande valeur possible, c'est-à-dire lorsqu'on aura $A+x=90^\circ$, d'où

$$x=90^\circ-A.$$

3° Dans le cas de minimum de DE, si l'on suppose

$$A=53^\circ 28' 15'', AD=25^m,15,$$

on a

$$DE=25^m,15\times\sin 53^\circ 28' 15''.$$

Ainsi

$$\log DE=\left\{\begin{array}{r}\log 25,15=1,4005380\\ +\log 53^\circ 28' 15''=\bar{1},9050150\\ \hline \log DE=1,3055530\end{array}\right.$$

d'où

$$DE=20^m,209. \quad (S.)$$

Dans le cas du minimum de la droite DE, cette dernière droite forme avec AD un angle $x = 36°31'45''$. (S.)

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 138.)

139. Des formules connues

$$\tang \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \tang \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\tang \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

on déduit aisément

$$p - a = \sqrt{S \frac{\tang \frac{B}{2} \tang \frac{C}{2}}{\tang \frac{A}{2}}},$$

$$p - b = \sqrt{S \frac{\tang \frac{C}{2} \tang \frac{A}{2}}{\tang \frac{B}{2}}},$$

$$p - c = \sqrt{S \frac{\tang \frac{A}{2} \tang \frac{B}{2}}{\tang \frac{C}{2}}}.$$

$$\frac{1}{2} \log S = 0{,}5000000$$

$$\frac{1}{2} \log \tang \frac{A}{2} = 0{,}9426881$$

$$\frac{1}{2} \log \tang \frac{B}{2} = \bar{2}{,}9706698$$

$$\frac{1}{2} \log \tang \frac{C}{2} = \bar{2}{,}8138889$$

CALCUL DE $(p-a)$.

$$\frac{1}{2}\log S = 0,5000000$$

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{B}{2} = \bar{2},9706698$$

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \bar{2},8158889$$

$$\text{Ct}\,\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{A}{2} = 1,0573119$$

$$\log(p-a) = \overline{3},3438706$$

$$p-a = 0,002207317$$

CALCUL DE $(p-b)$.

$$\frac{1}{2}\log S = 0,5000000$$

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \bar{2},8158889$$

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{A}{2} = 0,9426881$$

$$\text{Ct}\,\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{B}{2} = 1,0293302$$

$$\log(p-b) = 1,2879072$$

$$p-b = 19,40426$$

CALCUL DE $(p-c)$.

$$\frac{1}{2}\log S = 0,5000000$$

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{A}{2} = 0,9426881$$

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{B}{2} = 2,9706698$$

$$\text{Ct}\,\frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = 1,1841111$$

$$\log(p-c) = 1,5974690$$

$$p-c = 39^{m},57938$$

CALCUL DÉFINITIF.

$$p - b + p - c = 2p - (b + c);$$

de même

$$a = 38^m,983, \quad (S.)$$
$$b = 39^m,581, \quad (S.)$$
$$c = 19^m,406. \quad (S.)$$

140. Une formule connue donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c.$$

Pour rendre le second membre calculable par logarithmes, on remplace $\cos c$ par sa valeur $1 - 2\sin^2\frac{c}{2}$, et il vient

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(1 - 2\sin^2\frac{c}{2}\right)$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab + 4ab\sin^2\frac{c}{2}$$
$$= (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{c}{2} = (a-b)^2\left(1 + \frac{4ab\sin^2\frac{c}{2}}{(a-b)^2}\right).$$

En désignant par φ un angle auxiliaire tel que l'on ait

$$\tang^2\varphi = \frac{4ab\sin^2\frac{c}{2}}{(a-b)^2},$$

on aura

$$c^2 = (a-b)^2(1 + \tang^2\varphi) = (a-b)^2\left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)$$
$$= (a-b)^2\left(\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right),$$

ou

$$c^2 = (a-b)^2\frac{1}{\cos^2\varphi} = (a-b)^2\sec^2\varphi,$$

et par suite

$$c = (a-b)\sec\varphi = \frac{a-b}{\cos\varphi}; \quad (S.)$$

on a alors

$$\log c = \log(a-b) - \log\cos\varphi. \quad (S.)$$

141. Soit S la surface demandée, on aura

$$S = a \times \frac{AD}{2};$$

mais, dans le triangle rectangle ACD, on a

$$AD = b \sin C;$$

en substituant, on a

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C. \quad (S.)$$

S sera maximum en même temps que $\sin C$, c'est-à-dire quand on aura

$$\sin C = 1, \quad \text{d'où} \quad C = 90. \quad (S.)$$

Le triangle est alors rectangle.

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 141.)

142. On détermine d'abord a comme il suit :

$$ah = bc \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 + c^2;$$

doublant la première et ajoutant, on a

$$a^2 + 2ah = b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 = (2p - a)^2,$$

ou bien

$$2ah = 4p^2 - 4ap,$$

d'où

$$a = \frac{2p^2}{2p + h}.$$

Dans le triangle ABC, on a

$$b = a \sin B \quad \text{et} \quad c = a \sin C,$$

d'où

$$bc = a^2 \sin B \sin C = a^2 \sin B \cos B,$$

puisque

$$C = 90 - B;$$

mais

$$bc = ah;$$

donc

$$h = a \sin B \cos B,$$

ou bien

$$2h = a \times 2 \sin B \cos B = a \sin 2B;$$

d'où l'on tire

$$\sin 2B = \frac{2h}{a}. \quad (S.)$$

On aura ainsi B, et par suite

$$C = 90 - B. \quad (S.)$$

Le problème n'est possible que si h ne surpasse pas $\frac{a}{2}$.

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 142.)

143. Le triangle ACD, rectangle en D, donne

$$CD = AC \sin\gamma,$$

et le triangle ABC donne

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin ACB}, \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{d} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

d'où

$$AC = \frac{d \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

et par suite

$$CD = \frac{d \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}. \quad (S.)$$

C'est la distance demandée.

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 143.)

144. Si l'on pose

$$a = x^2 + x + 1,$$
$$b = 2x + 1,$$
$$c = x^2 - 1,$$

on aura

$$2p = 2x^2 + 3x + 1,$$

d'où

$$p = \frac{x^2 + 3x + 1}{2}.$$

Si l'on forme la quantité $p - a$ et qu'on remplace dans la formule

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

p, $p - a$, b et c par leurs valeurs, après avoir effectué les calculs, on trouvera

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{2} = 60^\circ,$$

et par suite

$$A = 120^\circ. \quad (S.)$$

145. De la formule connue

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

on tire

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

on ajoute les deux membres à l'unité et l'on a

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p \times 2(p-a)}{2bc};$$

or

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}.$$

Donc

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{4p(p-a)}{2bc}$$

et

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \quad (\textit{Voy. la } S.)$$

146. On a

$$S = \frac{1}{2}a \,.\, AD = \frac{1}{2}ab\sin C;$$

or

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{a\sin B}{\sin(B+C)}.$$

Donc

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}.$$

Pour avoir le maximum, posons

$$\sin B\sin C = \frac{\cos(B+C) - \cos(B+C)}{2}.$$

Comme $B + C =$ const., on voit que le maximum a lieu pour

$$\cos(B - C) = 1,$$

ou

$$B - C = 0,$$

d'où

$$B = C. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 146.)

147. On a

$$S = \frac{1}{2} a . AD = \frac{1}{1} aq \sin C,$$

$$S = ab \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}:$$

or

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ab}},$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{ab}}.$$

Substituant, on a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 147.)

148. Soient A, B, C les angles donnés, a, b, c les côtés opposés à ces angles, et $2p$ le périmètre donné. On a la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$= \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Pour rendre calculable par logarithmes la somme des sinus qui sont au dénominateur, on écrira

$$(1) \qquad \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2}\right) \cos \left(\frac{A-B}{2}\right),$$

$$(2) \qquad \sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Mais les angles C et (A + B) étant supplémentaires, leurs moitiés sont complémentaires; donc le sinus de l'un de ces angles est

égal au cosinus de l'autre. Ainsi

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Les égalités (1) et (2) deviennent donc

$$\sin A+\sin B=2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

$$\sin C=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2};$$

additionnant,

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right].$$

et enfin, si l'on remarque que l'on a entre crochets

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\cos\left[\frac{\left(\frac{A+B}{2}\right)+\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2}\right]$$

$$\times\cos\left[\frac{\left(\frac{A+B}{2}\right)-\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2},$$

il vient enfin

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

On en déduit

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

ou

$$a=\frac{p\sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p\,.\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

d'où enfin

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}. \quad (S.)$$

On a pareillement

$$b = \frac{p \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}, \quad (S.) \qquad c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}. \quad (S.)$$

149. On sait que le centre du cercle inscrit O se trouve au point de concours des bissectrices des angles A, B, C. On connaît donc les angles du triangle BOC, car

$$OBC = \frac{B}{2}, \quad OCB = \frac{90^\circ - B}{2} = 45^\circ - \frac{B}{2},$$

et l'angle O est le supplément des deux premiers. Or on a

$$\text{surf. BOC} = \frac{BC \times BO \,.\, \sin OBC}{2} = \frac{a}{2} \times BO \times \sin \frac{B}{2};$$

mais

$$BO = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\sin O} = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\sin 45^\circ};$$

donc enfin

$$\text{surf. BOC} = \frac{a^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{2 \sin 45^\circ};$$

mais cette même surface peut encore s'écrire $\frac{ar}{2}$. On a donc

$$\frac{ar}{2} = \frac{a^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{2 \sin 45^\circ},$$

d'où

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\frac{1\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

ou enfin

$$r = a\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right), \quad (S)$$

valeur calculable par logarithmes.

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 149.)

150. Supposons $a > b > c$, il en résulte $A > B > C$. Soit α la raison de la progression arithmétique dont A, B, C sont trois termes consécutifs. Nous avons

$$A = B + \alpha, \quad C = B - \alpha,$$

et pour la somme des angles

$$A + B + C = 3B = 180^\circ,$$

d'où

$$B = 60^\circ.$$

D'après la formule qui exprime la surface d'un triangle en fonction d'un côté et des angles, on a

$$m^2 = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2\sin B} = \frac{b^2 \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)}{2\sin 60^\circ},$$

et comme

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$m^2 = \frac{b^2 \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{2\sqrt{3}}{2}},$$

d'où

$$2\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2};$$

mais

$$\cos q - \cos p = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};$$

identifiant et substituant, il vient

$$\cos 2\alpha - \cos 120 = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2},$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} + \cos 120 = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} - \cos 60 = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} - \frac{1}{2},$$

ainsi

$$\cos 2\alpha = \frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} - \frac{1}{2}. \quad \text{(S.)}$$

Connaissant α, on calculera facilement les angles A, C, puis les côtés a, c.

Remarque 1. — Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$\frac{2m^2\sqrt{3}}{b^2} - \frac{1}{2} < 1 \quad \text{ou} \quad m^2 < \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Remarque 2. — On peut résoudre le problème par la géométrie, car, dans le triangle ABC, on connaît la base b, l'angle opposé $B = 60^\circ$ et la hauteur $h = \frac{2m^2}{b}$; on retrouverait de cette façon la condition de possibilité $m^2 < \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 150.)

151. Divisant par a et posant $\frac{b}{a} = \tang \varphi$, il vient

$$\sin x + \tang \varphi \cos x = \frac{c}{a},$$

d'où

$$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x = \frac{c}{a},$$

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c \cos \varphi}{a},$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a}.$$

Il reste à déterminer par les tables le plus petit angle α dont le sinus est $\frac{c \cos \varphi}{a}$. Alors, φ étant donné par un sinus, on a

$$x + \varphi = 2K\pi + \alpha,$$
$$x + \varphi = (2K + 1)\pi - \alpha,$$

d'où

$$x = 2K\pi - \varphi + \alpha, \quad (S.)$$
$$x = (2K + 1)\pi - \varphi - \alpha. \quad (S.)$$

(Les tables étant retirées, les candidats ne pourraient pousser plus loin le calcul.)

CONDITIONS POUR QUE LES VALEURS DE L'INCONNUE SOIENT RÉELLES

Il faut que $\sin(x + \varphi)$ soit compris entre -1 et $+1$, que par suite on ait

$$\frac{c^2 \cos^2 \varphi}{a^2} \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{a^2 + q^2} \leqslant 1,$$

en observant que

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

APPLICATION A L'EXEMPLE $\sin x + 2\cos x = 1$.

Dans ce cas,

$$\operatorname{tang} \varphi = 2, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

d'où

$$\sin(x + \varphi) = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Remarque. — On pourrait remplacer $\cos x$ par $\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ et résoudre par rapport à $\sin x$. On trouverait ainsi

$$\sin x = 1 \quad (S.) \quad \text{et} \quad \sin x = -\frac{3}{5};$$

$x = 90°$ satisfait à l'équation.

152. Soient a, b, c les côtés. On connaît a et la différence $a + b - c = d$; on sait de plus que $C = 2B$.

On a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

d'où

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c-b}{\sin C - \sin B} = \frac{a-d}{\sin C - \sin B};$$

mais

$$\sin C = \sin 2B,$$

et

$$A = 180 - (B + C) = 180 - 3B,$$

d'où

$$\sin A = \sin 3B;$$

donc

$$\frac{a}{\sin 3B} = \frac{a-d}{\sin 2B - \sin B}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sin 3B &= \sin 2B \cos B + \sin B \cos^2 B = 2 \sin B \cos^2 B \\ &\quad + \sin B (\cos^2 B - \sin^2 B) = 3 \sin B \cos^2 B - \sin^3 B \\ &= \sin B [3 \cos^2 B - \sin^2 B] = \sin B [4 \cos^2 B - 1],\end{aligned}$$

et

$$\sin 2B - \sin B = 2 \sin B \cos B - \sin B = \sin B (2 \cos B - 1):$$

substituant, il vient

$$\frac{a}{[4 \cos^2 B - 1]} = \frac{a-d}{[2 \cos B - 1]},$$

d'où

$$\frac{a}{(2 \cos B + 1)} = a - d,$$

d'où

$$a = 2(a-d) \cos B + a - d;$$

d'où enfin

$$\cos B = \frac{d}{2(a-a)}. \quad \text{(S.)}$$

Remarque. — Nous avons supprimé le facteur $2 \cos B - 1 = 0$, et par suite la solution $\cos B = \frac{1}{2}$, mais cette solution ne peut convenir, car on aurait

$$B = 60^\circ, C = 120^\circ \text{ et } A = 0.$$

B et C étant déterminés, il reste à résoudre un triangle dont on connaît un côté et les deux angles adjacents.

(*Voy.* ATLAS, *Trig*, *fig.* 152.)

153. Soit SABC le tétraèdre régulier. Désignons par α l'arête du tétraèdre. La projection H du sommet S sur la base ABC est le centre de gravité de cette base, c'est-à-dire le point des concours des médianes. L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan. Il s'agit donc de déterminer le sinus de l'angle $\alpha = \text{SAH}$. Or, dans le triangle rectangle SAH, on a

$$\text{SH} = \text{SA} \sin \alpha,$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{\text{SH}}{\text{SA}};$$

mais

$$\overline{\text{SH}}^2 = \overline{\text{SA}}^2 - \overline{\text{AH}}^2 = a^2 - \overline{\text{AH}}^2;$$

d'autre part,

$$\text{AH} = \frac{2\,\text{AD}}{3} = \frac{2\,a\sqrt{3}}{3 \times 2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(propriété des médianes et hauteur du triangle équilatéral). Substituant, il vient

$$\overline{\text{SH}}^2 = a^2 - \frac{3\,a^2}{9} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3\,a^2 - a^2}{3} = \frac{2\,a^2}{3},$$

d'où

$$\text{SH} = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

donc

$$\sin \alpha = \frac{\text{SH}}{\text{SA}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}816. \quad (\text{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *Trig.*, *fig.* 153.)

TABLE DES MATIÈRES

SOLUTIONS.

ARITHMÉTIQUE.

	Pages.
Approximations, multiplication abrégée, division abrégée	1
Plus grand commun diviseur et plus petit multiple	2
Racines carrées	3
Grandeurs proportionnelles	5
Intérêts simples et escomptes	7
Alliages	9
Problèmes divers	10

ALGÈBRE.

Division des polynômes	11
Équations du premier et du second degré	12
Équations réductibles au second degré	33
Décomposition d'un trinôme du second degré et de degré supérieur en facteurs du premier degré	36

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins. — 4479-76.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉES A LA SORBONNE DE 1853 A 1875

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE, DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1846 A 1875,

ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES, ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences
et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

QUESTIONS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1876

(Tous droits réservés.)

RECUEIL

DE PROBLÈMES

QUESTIONS.

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES DROITES ET LES ANGLES.

1. Étant données deux droites parallèles AB, CD, on demande de mener par un point donné O une droite dont la partie MN comprise entre les deux parallèles soit égale à 8 mètres. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 1.)

2. Étant donné un angle ASB, on demande de mener par un point donné O une droite qui retranche des côtés de l'angle, à partir du sommet, deux segments égaux S*a*, S*b*. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 2.)

3. Étant données deux droites parallèles, sur lesquelles sont pris deux systèmes de trois points A, B, C et A′, B′, C′, on a

$$AB = 2^m, \quad BC = 5^m, \quad A'B' = 1^m,24, \quad B'C' = 3^m,10.$$

On demande si les trois droites AA′, BB′, CC′, prolongées suffisamment, concourent en un même point. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 3.)

4. Étant donnés un angle *xoy* et deux points A, B, trouver sur les côtés de l'angle les points M et N tels, que AMNB soit le moindre possible. (Admission à l'École centrale, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 4.)

5. Étant données deux droites AB et CD et un point O, on demande de mener par ce point une droite dont la partie *mn* comprise entre les deux droites données ait son point milieu en O. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 5.)

6. Étant donnés trois points, mener par l'un d'eux une droite telle, que la somme des distances des deux autres points à cette droite soit égale à une longueur donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 6.)

7. Étant donnés trois points, mener par l'un d'eux une droite telle, que la différence entre les distances des deux autres points à cette droite soit une longueur donnée. (*Voy* ATLAS, *fig.* 7.)

8. On donne un angle BAC et un point D sur l'un des côtés de cet angle. On demande : 1° la formule qui exprime la longueur de DE, comprise entre le point D et le côté AB et formant un angle x avec le côté AD; 2° la valeur que doit avoir cet angle x pour que la longueur DE soit la plus petite possible: 3° la valeur minimum de la ligne DE, en supposant l'angle BAC égal à 53°28′15″ et la ligne AD égale à $25^{m}.15$. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 8.)

9. Étant donnés trois points A, B, C, on propose de mener par l'un d'eux une droite telle, que le produit des distances des deux autres points à cette droite soit égal à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 9.)

10. Étant donnés deux droites AB, AC et un point M, mener par ce point une sécante MBC telle, que $MB \times MC$ soit égal à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 10.)

11. Comment divise-t-on une droite AB en trois parties proportionnelles aux nombres $\frac{2}{3}$, 5 et $\frac{12}{5}$? (Sorbonne, 1861.)

12. Étant données deux droites indéfinies AA′, BB′, qui se coupent en un point S, on demande de mener par un point O une sécante qui retranche sur les deux droites, à partir du point

S, deux segments égaux. Discuter les différents cas qui peuvent se présenter quant au nombre de solutions. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 12.)

13. Comment divise-t-on une droite AB en trois parties proportionnelles aux nombres 2, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$? (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 13.)

14. Trouver une droite moyenne proportionnelle entre deux droites données. Démontrer la construction. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 14.)

15. Sur une ligne AB, dont la longueur est de $0^m,25$, on élève aux points A et B des perpendiculaires AC et BD, dont les longueurs sont : $AC = 0^m,13$, $BD = 0^m,7$; puis on prend sur AB un point O tel, que les angles COA et DOB soient égaux : calculer les distances OA et OB. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 15.)

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES.

1° DÉMONSTRATIONS DE PROPRIÉTÉS OU CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

16. Les deux triangles ABC, *abc* ont leurs côtés parallèles, savoir : AB parallèle à *ab*, BC parallèle à *bc*; prouver que les trois droites A*a*, B*b*, C*c* vont concourir en un même point. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 16.)

17. Prouver que les perpendiculaires aux trois côtés d'un triangle, menées par les milieux de ces côtés, passent par un même point. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 17.)

18. Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un même point. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 18.)

19. Les trois hauteurs d'un triangle se coupent au même point. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 19.)

20. Les trois médianes d'un triangle se coupent au même point, situé au tiers de leur longueur à partir des côtés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 20.)

21. Si l'on joint le sommet A d'un triangle au milieu I de la médiane adjacente BE, cette ligne prolongée rencontre le côté opposé en un point M tel, que BM $= \frac{1}{3}$ BC. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 21.)

22. Étant donné un triangle ABC, on mène les bissectrices des suppléments des angles A et B, lesquelles se coupent au

point I. Prouver que la droite qui joint ce point au centre du cercle inscrit au triangle passe par le troisième sommet C. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 22.)

23. Si l'on joint les pieds des hauteurs d'un triangle, les hauteurs du premier sont les bissectrices des angles du second. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 23.)

24. Prouver que les pieds des hauteurs et des médianes sont sur un même cercle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 24.)

25. Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de leur angle, plus le rectangle des segments de la base. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 25.)

26. Dans tout triangle, le produit de deux côtés est égal à la hauteur comprise, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 26.)

26 *bis*. Si, d'un point pris sur la base d'un triangle isoscèle, abaisse des perpendiculaires sur les deux autres côtés, la somme de ces perpendiculaires est constante. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 26 *bis*.)

27. Si, d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, la somme de ces lignes est constante. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 27.)

28. On demande de prouver que, quand, dans deux triangles ABC et DEF, les angles A et D sont suppléments l'un de l'autre, c'est-à-dire que leur somme est égale à deux angles droits, les surfaces des deux triangles sont entre elles dans le rapport des produits des côtés qui comprennent ces angles, c'est-à-dire dans le rapport de $\frac{AB \times AC}{DE \times DF}$. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 28.)

29. Calculer en fonction des côtés d'un triangle les rayons des cercles inscrit et exinscrit à ce triangle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 29.)

30. Étant donné le centre du cercle circonscrit à un triangle, on propose de démontrer que la somme des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés est égale à la somme des

rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 30.)

31. Prouver que, dans tout triangle rectangle : 1° le diamètre du cercle circonscrit est égal à l'hypoténuse ; 2° le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse. (Sorbonne, 1853.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 31.)

32. Si, du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, les cercles inscrits dans les deux triangles partiels sont proportionnels aux segments de l'hypoténuse. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 32.)

33. Tout triangle rectangle est équivalent au rectangle des segments interceptés sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig* 33.)

34. Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme P de ces trois côtés et la surface S du triangle. On indiquera la condition à laquelle les données doivent satisfaire pour que le problème soit possible. (Sorbonne, 1860.)

35. Démontrer que le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la distance des trois sommets. (Sorbonne, 1863.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 35.)

36. Si deux triangles ont les côtés parallèles chacun à chacun, les droites qui joignent les sommets homologues des deux triangles concourent en un même point. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 36.)

37. Étant donnés deux nombres a et b, on en forme trois autres dont l'un est le produit ab, le deuxième est la demi-somme de leurs carrés, le troisième est la demi-différence de ces mêmes carrés ; on demande de prouver que tout triangle dont les trois côtés seront proportionnels à ces trois nombres sera rectangle. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 37.)

38. Étant donné un triangle ABC, mener au côté BC une parallèle DE telle, que la surface du triangle ADE soit le tiers du triangle ABC. (Sorbonne, 1864.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 38.)

39. On donne l'hypoténuse a d'un triangle rectangle et la perpendiculaire h abaissée du sommet de l'angle droit sur cette hypoténuse; calculer les deux autres côtés du triangle. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 39.)

40. Partager le triangle ABC en deux parties équivalentes par une droite parallèle au côté BC. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 40.)

41. On donne les bases A et B d'un trapèze et sa hauteur H. A quelle distance de A faudra-t-il mener une parallèle à la base A pour que la surface du trapèze soit partagée en deux parties équivalentes? (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 41.)

42. Calculer les côtés d'un rectangle, connaissant la diagonale d et le périmètre $2p$. Dire quelles sont les conditions pour que le problème soit possible. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 42.)

43. Deux cordes de cercle AB et CD se coupent en un point O; les deux parties OA et OB de la première sont égales respectivement à $1^m,20$ et $2^m,10$; la différence des deux parties OC et OD de la deuxième corde est $1^m,84$. On demande quelle est la longueur de cette corde. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 43.)

2° CONSTRUCTIONS DE TRIANGLES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

44. Construire un triangle, connaissant les pieds des trois hauteurs. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 44.)

45. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la somme des deux autres côtés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 45.)

46. Construire un triangle, connaissant sa base, l'angle opposé et la différence des deux autres côtés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 46.)

47. Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la différence des longueurs des droites qui joignent les extrémités de l'hypoténuse au centre du cercle inscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 47.)

48. Construire un triangle, connaissant la base, la somme des deux autres côtés et la différence des angles à la base. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 48.)

49. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur correspondante à l'un des angles opposés et le périmètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 49.)

50. Construire un triangle, connaissant sa base, la hauteur correspondante et le produit des deux autres côtés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 50.)

51. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et le rayon du cercle inscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 51.)

52. Construire un triangle, connaissant la base, la somme des deux autres côtés et le rayon du cercle inscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 52.)

53. Construire un triangle, connaissant les angles et une médiane. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 53.)

54. Construire un triangle, connaissant une médiane et les deux côtés correspondants en longueur. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 54.)

55. Construire un triangle, connaissant les trois médianes. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 55.)

56. Construire un triangle, connaissant la base, la somme des deux autres côtés et sachant de plus que le sommet se trouve sur une droite donnée de position. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 56.)

57. Trouver un triangle rectangle dont les trois côtés soient trois nombres entiers consécutifs. (Sorbonne, 1860.)

58. Les deux côtés AB, AC et l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC forment une progression arithmétique ou par différence, dont la raison est 25 mètres; trouver les trois côtés AB, AC, BC du triangle rectangle. (Sorbonne, 1858.)

59. Les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle étant 1 et 2, on demande de calculer à 0,01 près la valeur du rayon du cercle inscrit. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 59.)

60. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, sachant que la somme de ses côtés est égale à 132 et que la somme de leurs carrés est égale à 6050. (Sorbonne, 1859.)

61. Dans un triangle ABC, rectangle en A, abaisser la hauteur AH sur l'hypoténuse BC; on représente par a et b les côtés AB et AC, et l'on propose de trouver, au moyen de ces données, les deux segments de l'hypoténuse, ainsi que la hauteur. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 61.)

62. Construire un triangle semblable à un triangle donné ABC et dont la surface soit à celle du triangle ABC comme une longueur donnée m est à n. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 62.)

63. Une colonne de longueur b est surmontée d'un mât de longueur c. A quelle distance du pied de la colonne et dans le plan horizontal qui passe par le pied de cette colonne doit être placé un observateur pour que le mât et la colonne soient vus sous le même angle? (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 63.)

64. Trouver les longueurs des bissectrices d'un triangle, quand on donne les trois côtés. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 64.)

65. Étant donnés : 1° d'abord la différence D de deux longueurs inconnues x et y; 2° le côté K du carré équivalant au rectangle construit sur x et y, on demande de construire les lignes x et y. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 65.)

66. On donne un triangle ABC dans lequel DC $= a$ et AD $= h$. On demande de mener deux parallèles MN et M'N' à la base, de telle sorte que leur différence soit α et que la surface du trapèze MNM'N' soit équivalente à un carré donné. Voir si le problème est toujours possible. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 66.)

67. Étant donné un triangle ABC, mener une droite DE parallèle à BC telle, que la surface ADE soit le tiers de la surface ABC. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 67.)

3° PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

68. La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage cette hypoténuse en deux segments dont les longueurs sont $2^m,88$ et $5^m,12$; on demande de calculer à 0,001 près les côtés de l'angle droit. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 68.)

69. La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse la partage en deux segments dont les longueurs sont $3^m,643$ et $4^m,928$; calculer les angles du triangle. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 69.)

70. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de 55 mètres et sa surface de 726 mètres carrés. Trouver les deux côtés de l'angle droit. (Sorbonne, 1859.)

71. La surface d'un triangle rectangle est de $12^{mq},65$, la différence des carrés des côtés de l'angle droit est de $17^{mq},35$: on propose de calculer ces côtés à 0,001 près. (Sorbonne, 1860.)

72. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de $32^m,526$; le rapport des côtés de l'angle droit est de $2^m,317$; on demande de calculer ces côtés à moins de $0^m,001$. (Sorbonne, 1859.)

73. Construire, sur une longueur de 21 mètres, un triangle rectangle ayant la longueur donnée pour un des côtés de l'angle droit, et tel que la somme de l'hypoténuse et de l'autre côté soit double du côté donné. (Sorbonne, 1854.)

74. Un triangle ABC étant donné, on propose de mener du sommet C à la base AB deux droites CM et CN, qui partagent le triangle en trois autres triangles dont les surfaces soient entre elles comme 1, 2 et 3. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 74.)

75. Un triangle ABC étant donné, mener au côté BC une parallèle DE telle, que la surface du triangle ADE soit le tiers de

la surface du grand triangle ABC. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 75.)

76. On demande de mener, dans un triangle donné ABC, une droite DE parallèle au côté BC, et telle que le rapport des surfaces du triangle ADE et du trapèze DEBC soit égal à celui de deux lignes données M et N. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 76.)

77. Du sommet A du triangle ABC, on abaisse la ligne AD perpendiculaire sur le côté BC, et l'on demande de calculer les deux segments BD et DC, sachant que l'on a

$$AB = 307^m,800, \quad AC = 480^m,168, \quad BC = 689^m,472.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 77.)

78. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel, qu'en le joignant aux trois sommets le triangle donné soit décomposé en trois triangles équivalents. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 78.)

79. Étant donné un triangle ABC, on propose de mener à la base une parallèle MN, telle que AN = BM. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 79.)

80. On donne un triangle ABC dont la base BC est égale à a et la hauteur AD égale à h; on demande de mener deux parallèles MM et M'N' à la base, de telle sorte que leur différence soit d et que la surface du trapèze MNM'N' soit équivalente à un carré donné m^2. Voir si le problème est toujours possible. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 80.)

81. On donne un triangle ABC dont la base AC est égale à 2 mètres et la hauteur égale à 1 mètre. On demande de mener une droite BX qui partage ce triangle en deux autres tels, que leur différence ou leur somme soit au rectangle des deux segments AX et CX dans un rapport donné. (Sorbonne, 1861.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 81.)

82. Calculer à 0,01 près la hauteur d'un triangle dont la base est de 647 mètres et dont la surface doit être moyenne proportionnelle entre celles de deux rectangles dont la hauteur est 2 mètres et les bases $853^m,45$ et $4727^m,5$. (Sorbonne, 1854.)

83. Dans un triangle isoscèle ABC, la base BC est de 1235 mè-

tres et la valeur commune des angles B et C est de 64°22'; trouver le rayon du cercle inscrit au triangle. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 83.)

84. Les trois côtés AB, BC et AC d'un triangle ABC sont représentés par 112 mètres, 506 mètres et 514 mètres; trouver les valeurs des six segments AF, BF, BD, CD, CE, AE déterminés sur ces côtés par le cercle inscrit au triangle. (Sorbonne, 1858.) *Voy.* ATLAS, *fig.* 84.)

85. Trouver les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle équilatéral dont le côté est de 3 mètres. (Sorbonne, 1858.)

86. Calculer à 0,01 près le rapport de la surface d'un triangle équilatéral à la surface du cercle circonscrit à ce triangle. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 86.)

87. Calculer à 1 centimètre carré près la surface de l'un des trois segments qui sont compris entre la circonférence d'un cercle de 8 mètres de rayon et le triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. (Sorbonne, 1859.)

88. Un triangle équilatéral a pour côté 2 mètres. De chacun des sommets comme centre et avec 1 mètre pour rayon on décrit un cercle : on a ainsi trois cercles égaux et tangents. Il s'agit : 1° de construire le cercle qui les enveloppe et celui qu'ils enveloppent tangentiellement; 2° d'évaluer les rayons des nouveaux cercles et de prendre leur moyenne géométrique; 3° de comparer cette moyenne géométrique avec le rayon du cercle inscrit au triangle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 88.)

89. Les trois côtés du triangle sont $a = 120$ mètres, $b = 135$ mètres, $c = 113$ mètres; calculer à 0,001 près la hauteur correspondante au côté a pris comme base. (Sorbonne, 1866.)

90. L'hypoténuse d'un triangle rectangle égale 1, la somme des côtés de l'angle droit égale 1,4; calculer ses côtés. (Sorbonne, 1868.)

91. Étant donné un trapèze de bases a et b et de hauteur h, le partager par une ligne parallèle aux deux bases en deux par-

ties dont les aires aient un rapport donné. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 91.)

92. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ont pour longueur $3^m,128$ et $4^m,275$; calculer à 0,001 près les segments que la bissectrice de l'angle droit de ce triangle détermine sur l'hypoténuse. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 92.)

93. On donne les trois côtés du triangle ABC; $AB = 143^m,25$, $AC = 208^m,33$, $BC = 315^m,48$. Calculer à 0,01 près la perpendiculaire AD. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 93.)

94. La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage cette hypoténuse en deux segments dont les longueurs sont $2^m,88$ et $5^m,12$. On demande de calculer à 0,001 près les côtés de l'angle droit. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 94.)

95. Trouver en degrés, minutes et secondes, dixièmes et centièmes de seconde, la valeur de l'arc dont la longueur est de 3 mètres dans la circonférence qui a 2 mètres de rayon. (Sorbonne, 1873.)

96. Un terrain a la forme d'un trapèze isoscèle dont les bases sont respectivement égales à 100 mètres et 40 mètres, et dont le côté est de 50 mètres. On demande : 1° la surface de ce terrain en ares; 2° la surface aussi en ares du terrain triangulaire qu'on obtiendrait en ajoutant au trapèze le triangle partiel formé par le concours des côtés non parallèles. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 96.)

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LES QUADRILATÈRES.

1° DÉMONSTRATIONS DE PROPRIÉTÉS OU CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

97. On a deux carrés; le côté de l'un est égal à la diagonale de l'autre : quel est le rapport des surfaces des deux carrés? (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 97.)

98. Si, à partir des différents sommets d'un carré, on porte toujours dans le même sens des longueurs égales, la figure formée en joignant les points consécutifs ainsi obtenus est encore un carré. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 98.)

99. On mène une droite par les milieux des côtés parallèles d'un trapèze, et l'on propose de démontrer qu'en prolongeant cette ligne, ainsi que les deux côtés parallèles, ces trois droites iront se couper en un même point. (Sorbonne, 1861.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 99.)

100. Si dans un parallélogramme on mène une diagonale AC et une sécante quelconque DE, on aura

$$\overline{DF}^2 = FG \times FE.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 100.)

101. La figure qui a pour sommet les milieux des côtés d'un quadrilatère est un parallélogramme. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 101.)

102. On a tracé dans un plan la médiane qui joint les milieux des deux côtés opposés d'un quadrilatère, et l'on a mesuré la

distance du milieu de cette médiane à un axe situé dans le plan. On propose de démontrer que cette distance est la moyenne arithmétique des distances des quatre sommets du quadrilatère au même axe, et que le point de rencontre des deux médianes est le milieu de chacune d'elles. (Sorbonne, 1854.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 102.)

103. Étant donné un quadrilatère ABCD dont deux angles opposés sont droits, on demande de prouver que, si d'un point M de la diagonale AC on abaisse sur les côtés CB et AD les perpendiculaires MP et MQ, la somme des deux rapports $\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1$. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 103.)

104. Dans un quadrilatère inscriptible, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 104.)

105. Les bissectrices des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible sont à angle droit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 105.)

106. Étant donné le trapèze ABCD, on demande de construire la droite PQ parallèle aux bases et qui partage la surface du trapèze en deux parties ayant entre elles le rapport $\frac{2}{3}$. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 106.)

107. On donne un trapèze ABCD; on partage les côtés non parallèles AC et BD, à partir des points A et B, dans le rapport de 2 à 3, et l'on joint les points de division : on propose de démontrer que la ligne EF est parallèle aux bases du trapèze et de calculer la longueur de la droite EF, sachant que AB = 1215 mètres et que CD = 3850 mètres. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 107.)

2° CONSTRUCTIONS DE QUADRILATÈRES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

108. Construire un carré, connaissant la somme de son côté et de sa diagonale. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 108.)

109. Construire un carré, connaissant les quatre points où les côtés prolongés coupent une droite indéfinie. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 109.)

110. On donne deux droites parallèles et deux points, mener par ces points deux parallèles qui forment avec les droites données un losange. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 110.)

111. Construire un trapèze inscrit dans un cercle donné, connaissant sa hauteur et la demi-somme des bases. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 111.)

112. Construire un trapèze inscrit dans un cercle donné, connaissant sa hauteur et la différence des bases. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 112.)

113. Construire un quadrilatère plan, connaissant les longueurs des quatre côtés et de la ligne qui joint les milieux des deux côtés opposés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 113.)

3° PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

114. La surface d'un carré est égale à 3873 hectares; on propose de calculer à 1 centimètre près le côté de ce carré. (Sorbonne, 1860.)

115. On a un polygone ABCDE composé d'un triangle équilatéral BCE et d'un carré ABED. La surface de ce polygone est égale à 3 hectares 36 ares. On demande de trouver le côté AB (Sorbonne, 1858.)

116. Calculer le côté d'un carré dont la surface serait égale à la surface de la Terre supposée sphérique. (Sorbonne, 1858.)

117. Construire un carré dans lequel la différence entre la diagonale et le côté soit égale à 6 mètres ; quel sera le rayon du cercle circonscrit à ce carré? (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 117.)

118. La surface d'un rectangle est de 216 mètres carrés, et son périmètre est de 60 mètres ; quels sont les côtés du rectangle? (Sorbonne, 1859.)

119. Sur un terrain plat, on veut établir pour un troupeau de moutons un parc rectangulaire qui ait 6400 mètres carrés de superficie et dont le périmètre soit de 400 mètres, longueur totale d'une clôture mobile dont on peut disposer. On demande quelles longueurs doivent avoir les côtés du rectangle. (Sorbonne, 1859.)

120. Un trapèze est donné dans lequel les deux bases parallèles et la hauteur sont représentées par a, b, h ; on divise les côtés en trois parties égales par des parallèles aux bases, ce qui partage le trapèze donné en trois trapèzes partiels. On propose de trouver la surface de chacun de ces trapèzes, exprimée au moyen des données a, b, h. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 120.)

121. Les deux côtés parallèles d'un trapèze ont pour valeur $3^m,121$ et $5^m,17$; les deux autres côtés sont également inclinés sur les bases et ont pour valeur $2^m,2$; trouver la surface du trapèze. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 121.)

122. Les deux bases d'un trapèze ont respectivement pour longueur 12 mètres et 7 mètres ; on demande de calculer la position de la droite parallèle aux bases qui diviserait le trapèze en deux parties équivalentes. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 122.)

123. Étant donné un trapèze ABCD dont les bases parallèles AB, CD ont en longueur respectivement $3^m,15$ et $1^m,65$, et dont la hauteur est 2 mètres ; par le point E pris sur la base supérieure DC, à la distance DE égale à $0^m,70$, on mène la droite EF

qui divise le trapèze en deux autres DEFA et DCFB, dont le premier est le tiers du second en surface; on demande quelle est la distance AF. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 123.)

124. L'une des bases d'un trapèze égale 10 mètres, sa hauteur est de 4 mètres, sa surface de 32 mètres carrés. A une distance de 1 mètre de la base donnée, on lui mène une parallèle. On demande la longueur de la partie de cette droite comprise dans l'intérieur du trapèze. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 124.)

125. La hauteur d'un trapèze est 10 mètres, la surface de ce trapèze est égale à celle d'un rectangle qui serait construit sur les deux bases parallèles; de plus, le double de la plus petite base, ajouté au triple de la plus grande, est égal à quatre fois la hauteur du trapèze. On demande la valeur des deux bases. (Sorbonne, 1858.)

126. Étant donné un trapèze ABCD dont les deux bases parallèles AB et CD sont respectivement égales à 5 mètres et 3 mètres, on demande par quel point I de la diagonale AC passe la droite EF parallèle au côté AD qui divise le trapèze en deux parties AEFD et EBCF, qui sont dans le rapport de 2 à 3.) Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 126.)

127. On donne un trapèze ABCD dans lequel on a AB = 1, AC = 2, CD = 3; on demande dans quel rapport AC sera divisé par la parallèle aux bases qui partagerait la surface du trapèze en deux parties équivalentes. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 127.)

128. Les bases d'un trapèze sont AB = 18^m, CD = 12^m, la hauteur est 7 mètres. Calculer à 0,01 près à quelle distance de la base AB il faut mener une parallèle EF à cette base pour que cette ligne partage la surface du trapèze en deux parties équivalentes. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 128.)

129. Les deux côtés parallèles d'un trapèze ont pour valeur $3^m,121$ et $5^m,17$. Les deux autres sont également inclinés sur les bases et ont pour valeur $2^m,2$. Trouver la surface du trapèze. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 129.)

130. Dans un trapèze ABCD, on donne les deux bases

$$AB = 738^m, \quad CD = 548^m,$$

et les côtés non parallèles

$$AC = DB = 203^m.$$

Calculer à $0^m,001$ près les deux diagonales. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 130.)

131. Les deux bases parallèles d'un trapèze sont égales à 5 mètres et à 3 mètres. On demande par quel point I de la diagonale AC passe la droite EF parallèle au côté AD et divisant le trapèze en deux parties dont le rapport soit $\frac{2}{3}$. (Sorbonne, 1864.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 131.)

132. On donne un trapèze ABCD et un point I sur la base supérieure CD; mener par ce point une droite IF qui partage le trapèze en deux autres équivalents. Appliquer au cas de $AB = 6^m$, $DC = 4^m,50$, $DI = 1^m,50$. (Sorbonne, 1864.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 132.)

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES SUR LA CIRCONFÉRENCE ET LE CERCLE.

1° CONSTRUCTIONS DE PROPRIÉTÉS OU CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

133. Sur le cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC on prend un point à volonté ; prouver que $HB = HA + HC$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 133.)

134. Si du point A, milieu de BC, on mène deux sécantes quelconques, AF, AG, le quadrilatère FDEG est inscriptible. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 134.)

135. On a dans un cercle une corde CD, parallèle au diamètre AB ; des extrémités de la corde on abaisse des perpendiculaires CE, DF sur le diamètre ; on demande de prouver que les segments AE et BF sont égaux. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 135.)

136. Quand deux cercles se touchent en un point P, si par ce point on mène deux droites qui rencontrent l'un des cercles en A et B et l'autre en A′ et B′, on demande de prouver que la corde AB est parallèle à la corde A′B′. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 136.)

137. Quand deux cercles se coupent en un point O, si par ce point on mène trois droites qui les rencontrent aux points A, B, C et A′, B′, C′, on demande de prouver que les deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 137.)

138. On donne un cercle dont le centre est O et le rayon

OA = R; on prolonge OA de AB = a; on demande de mener par le point B une sécante BMN telle, que le rapport $\frac{BN}{BM} = \frac{m}{n}$ soit un nombre donné m. On reconnaîtra si ce nombre peut être choisi arbitrairement. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 138.)

139. Sur le diamètre AB d'un cercle, on prend deux points C et D, à égale distance du centre; démontrer que, si l'on joint les points C et D à un point quelconque M de la circonférence, la somme $\overline{MC}^2$ et $\overline{MD}^2$ sera toujours la même, quel que soit le point M. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 139.)

140. On donne un cercle et une droite GH perpendiculaire à son diamètre AB ; par le point A on mène une corde AD qui rencontre la droite GH en C; on demande de prouver que le produit des deux lignes AD et AC a toujours la même valeur, quelle que soit la direction de la corde AD. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 140.)

141. Quand deux cercles se coupent en deux points P et Q, si par le premier point P on mène une droite PAA′ qui les rencontre en A et A′, on demande de prouver que l'angle AQA′ est toujours de même grandeur, quelle que soit la direction de la ligne PAA′. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 141.)

142. Si par un point pris dans un cercle on mène deux cordes perpendiculaires, la somme des carrés de ces droites a une valeur constante. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 142.)

143. Si d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds de ces trois perpendiculaires sont en ligne droite. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 143.)

144. Sur une ligne AC on construit une demi-circonférence; sur cette même droite on prend un point B. Trouver sur la circonférence un point M tel, que la tangente en ce point soit également inclinée sur les droites MA, MB. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 144.)

145. Par le point d'intersection de deux cercles, inscrire une droite égale à une longueur donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 145.)

146. Étant données deux circonférences, mener une sécante telle que la somme des parties interceptées par les circonférences soit égale à une longueur donnée, la sécante étant parallèle à une direction donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 146.)

147. Étant donnés deux cercles qui se coupent, mener par l'un des points d'intersection une droite qui ait son milieu en ce point. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 147.)

148. Étant donnés un angle et un cercle inscrit dans cet angle, mener à ce cercle une tangente telle, que la partie interceptée entre les côtés de l'angle soit égale à une longueur donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 148.)

149. Étant donnée une circonférence O, un diamètre AB et un arc CD, trouver un point P tel que, si l'on joint CP, DP, on ait MO = ON. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 149.)

150. On donne de grandeur et de position deux circonférences O et O′ et un point A dans leur plan. On propose de mener MN passant par le point A, de façon que

$$\frac{AM}{AN} = \frac{m}{n}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 150.)

151. Lorsque trois cercles se coupent deux à deux, les cordes d'intersection passent au même point. (*Voy* ATLAS, *fig.* 151.)

152. Si l'on fait rouler un cercle dans un autre de rayon double, fixe de position, un point quelconque du premier cercle décrit une droite. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 152.)

153. Si par un point pris en dehors d'un cercle on mène deux sécantes également distantes du centre, les diagonales du quadrilatère formé par les points d'intersection se coupent en un point constant. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 153.)

154. On demande de mener par le centre C d'un cercle une oblique CD sur la tangente en un point A, telle que la partie DE, comprise entre la circonférence et la tangente, soit moitié de la distance DA. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 154.)

155. Par un point O pris sur la circonférence d'un cercle, on mène des cordes OA, OB, OC et on les prolonge jusqu'en A', B', C de quantités égales à elles-mêmes. On demande de prouver que ces points sont sur une deuxième circonférence de cercle, et l'on demande en outre quel est le rapport des surfaces des deux cercles. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 155.)

156. Quand deux cercles se coupent en un point O, si par ce point on mène trois droites qui les rencontrent en a, b, c, a', b', c', prouver que les deux triangles abc, $a'b'c'$ sont semblables. (Sorbonne, 1863.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 156.)

157. On prend sur le diamètre AB d'un cercle deux points C et D également distants du centre O. On joint un point M de la circonférence à ces deux points C et D. Démontrer que la somme $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$ restera la même, quelle que soit la position du point M. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 157.)

2 CONSTRUCTIONS DE CIRCONFÉRENCES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

158. Construire un cercle, connaissant son rayon, et assujetti à passer par un point et à être tangent à un cercle donné.

159. Construire un cercle passant par un point donné et tangent à un cercle donné en un point donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 159.)

160. Construire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 160.)

161. Construire une circonférence passant par un point et tangente à deux droites. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 161.)

162. Construire une circonférence tangente à trois circonférences données et égales entre elles.

163. Construire une circonférence tangente à une circonférence donnée et passant par deux points. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 163.)

164. Construire une circonférence passant par deux points et interceptant une longueur donnée sur une droite. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 164.)

165. Construire une circonférence qui passe par deux points donnés et interceptant sur une circonférence donnée un arc dont la corde soit égale à une longueur donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 165.)

166. Construire une circonférence ayant son centre en un point donné et interceptant sur deux parallèles des longueurs dont la somme soit égale à une longueur donnée.

167. Quand deux cercles se touchent en P, si par ce point on mène deux droites qui rencontrent l'un des cercles en A et B, l'autre en A′ et B′, on demande de prouver que la corde AB est parallèle à A′B′. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 167.)

168. On demande de déterminer sur la tangente AB un point A d'un cercle dont le centre est C, un point D tel que la partie DE comprise entre ce point et la circonférence sur la droite menée du point D au centre C soit moitié de AD. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 168.)

3° PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

169. Le rayon de la surface des mers, si l'on suppose la Terre sphérique, est de 6366198 mètres. On demande à quelle distance peut s'étendre en pleine mer la vue de l'observateur élevé de 50 mètres au-dessus du niveau de l'eau. (Sorbonne, 1854.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 169.)

170. On demande de mener, par le centre C d'un cercle, une oblique CD sur la tangente en un point A, telle que la partie DE de cette oblique comprise entre la circonférence et la tangente soit la moitié de la distance du point D au point de contact A. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 170.)

171. Les deux droites OA, OB se coupent à angle droit au centre O d'un cercle dont le rayon OA est de 1091 mètres; par le point C pris sur le prolongement de OA, à la distance OC = 1997 mètres du centre, on mène la tangente CD au cercle; trouver à quelle distance OB du point O cette tangente coupe la droite OB. Déterminer aussi l'angle OCB. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 171.)

172. Deux cercles ont pour rayon, l'un 20 mètres, l'autre 21 mètres; on demande quel rayon doit avoir un troisième cercle pour que sa surface soit la somme des surfaces des deux premiers. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 172.)

173. Connaissant les rayons AC, BD de deux cercles et la distance AB de leurs centres, savoir : AC = 327^m, BD = 115^m, AB = 729 mètres, trouver la longueur CD de la tangente commune menée extérieurement à ces cercles. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 173.)

174. Les rayons des deux cercles O et O′ sont respectivement 3^m,75 et 2^m,15; la distance des centres est 4^m,95. Cela posé, on demande de calculer l'aire MANB, comprise entre les arcs MAN et MBN. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 174.)

175. Un cercle de 5 mètres de rayon est inscrit dans un angle BAC de 38°42′25″; on demande de calculer, à 0^m,01 près, l'aire de la figure ABCD comprise entre l'arc BDC du cercle et les deux côtés de l'angle. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 175.)

176. Dans le cercle O, l'angle au centre AOB = 30°; on sait en outre que la surface du triangle surpasse de 2 mètres carrés la surface du segment AMB. On demande de calculer le rayon du cercle à 0,001 près. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 176.)

177. La circonférence étant divisée en 360°, le degré en 60′, la minute en 60″, etc., on demande quelle fraction de la circonférence est l'arc de 27°17′32″. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 177.)

178. Calculer, à 0,01 près, le rapport des surfaces des deux

segments de cercle CED et CBD, sachant que la corde CD passe par le milieu du rayon AB qui lui est perpendiculaire. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 178.)

179. Calculer à 0",1 près l'angle que doivent faire deux rayons d'un cercle pour que la surface du triangle formé par ces deux rayons et par la corde qui joint leurs deux extrémités soit le $\frac{1}{11}$ de la surface du cercle. (Sorbonne, 1860.)

180. Calculer en hectares la surface du segment compris entre un arc de 60 degrés et sa corde, dans un cercle dont le rayon est de 572 mètres. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 180.)

181. On a deux cercles concentriques dont les rayons sont $7^m,5$ et $2^m,8$; on mène par le centre O de ces deux cercles deux rayons OA et OB, faisant entre eux un angle de 37 degrés; on demande de calculer la surface de la partie A B A'B' du plan compris entre les deux rayons et les circonférences des deux cercles. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 181.)

182. On donne un cercle dont le rayon est 26 mètres. On y inscrit une corde CD de 24 mètres. Cette corde divise en deux parties le diamètre AB qui lui est perpendiculaire. On demande la longueur de chacune de ces parties. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig* 182.)

183. On donne deux points A et B sur une parallèle à une ligne donnée xy; leur distance $AB = 2a$; la distance des deux parallèles est b; on demande à quelle distance de la droite AB se trouve le centre du cercle qui passera par les deux points A et B et est tangent à la droite xy. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 183.)

184. Par le centre du cercle O, on mène les deux droites AB et CD, perpendiculaires entre elles, et, d'un point M de la circonférence, on abaisse sur ces deux droites des perpendiculaires MP et MQ: on demande si la somme des deux lignes MP et MQ est susceptible d'un maximum ou d'un minimum.

Si la réponse est affirmative, on déterminera la position du point M qui convient au maximum ou au minimum. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 184.)

185. On demande quel angle doivent faire entre eux deux rayons OA, OB d'un cercle pour que la surface du triangle AOB soit le plus grande possible. On calculera à 0,0001 près le rapport de cette surface maximum à celle du cercle. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 185.)

186. Calculer à 1 décimètre carré près l'aire d'un segment de cercle dont l'arc est de 30°, le rayon du cercle étant égal à 1 mètre. (Sorbonne, 1870.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 186.)

187. Dans un cercle de rayon R, on mène une corde à une distance du centre $\frac{R}{2}$; calculer les expressions des surfaces des deux segments déterminés par cette corde. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 187.)

188. Deux cordes d'un cercle AB et CD se coupent en O; les points OA, OB de la première corde sont respectivement égaux à $1^m,2$ et $2^m,1$. La différence entre les parties OC, OD de la seconde corde CD est de $1^m,84$. On demande la longueur de la corde CD. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 188.)

189. Dans un cercle dont le rayon est de 10 mètres, calculer la surface du segment dont l'arc est de 120°. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 189.)

190. On a deux cercles concentriques dont les rayons sont de $7^m,5$ et de $2^m,8$. On mène par le centre de ces deux cercles deux rayons OA et OB faisant entre eux un angle de 37°. On demande de calculer la surface ABCD du plan compris entre les deux rayons et les circonférences des deux cercles. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 190.)

191. Calculer à 0,01 près le rayon d'un cercle dont la surface est de 35 mètres carrés. (Sorbonne, 1867.)

192. Calculer en degrés, minutes et secondes la valeur d'un arc de cercle dont le rayon est de 5 mètres, sachant que la surface du secteur qui correspond à cet arc est de 7 mètres carrés. (Sorbonne, 1865.)

193. Deux cordes AB et CD se coupent au point M; on con-

naît $AM = 2^m,56$, $MB = 3^m,60$ et $CD = 8^m,64$. On demande de calculer CM et MD. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 193.)

194. Calculer les côtés d'un trapèze isoscèle circonscrit à un cercle, sachant que la somme des deux côtés parallèles est égale à $2a$ et que la surface est égale à celle d'un carré dont le côté est b. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 194.)

195. Les rayons OA, OB de deux cercles concentriques valent 20 et 36 mètres. Dans le grand cercle, on mène une corde MN tangente au petit; calculer sa longueur. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 195.)

196. Deux cercles ont pour rayons, l'un 20 mètres, l'autre 21 mètres. On demande quel doit être le rayon d'un troisième cercle pour que sa surface soit égale à la somme des surfaces des deux premiers. (Sorbonne, 1866.)

197. La distance des centres de deux cercles est égale à 8 mètres; les rayons de ces deux cercles sont égaux à 4 mètres et à 7 mètres. Calculer avec six chiffres décimaux la portion d'une tangente commune qui est comprise entre les deux points de contact. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 197.)

198. D'un point A distant de 5 mètres du centre O d'un cercle dont le rayon est 2 mètres, on mène une sécante sur laquelle le cercle intercepte une longueur de 1 mètre. Calculer la longueur de la partie extérieure. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 198.)

199. A un cercle de rayon R, on circonscrit un triangle équilatéral ABC et l'on mène une tangente DE parallèle au côté BC. Calculer la surface du trapèze BCDE. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 199.)

CHAPITRE V.

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

200. Trouver l'angle du polygone régulier de dix-sept côtés; y a-t-il dans un tel polygone deux côtés parallèles? Trouver le plus petit angle que forment deux côtés prolongés. (Sorbonne, 1853.)

201. On se propose de carreler une salle ayant $5^m,10$ de largeur sur $6^m,935$ de longueur avec des carreaux hexagones réguliers de $0^m,1$ de côté, en remplissant les vides aux angles et sur les côtés rectangles du parquet rectangulaire par des fragments de carreaux convenablement découpés. On demande quel est, à une unité près, le nombre de carreaux nécessaires. (Sorbonne, 1854.)

202. On a un hexagone régulier dont le côté est égal à 1 mètre; sur chacun des côtés AB, BC, CD, etc., on construit un carré extérieur à l'hexagone. Cela posé, on demande : 1° de démontrer que les sommets extérieurs à l'hexagone des six carrés dont il vient d'être question forment un polygone régulier de douze côtés; 2° de calculer la surface de ce polygone régulier. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 202.)

203. Le côté d'un hexagone régulier est de $34^m,25$. On demande de calculer la surface de cet hexagone à 1 centimètre carré près. (Sorbonne, 1859.)

204. Calculer, à l'aide des tables trigonométriques, la longueur de la diagonale d'un pentagone régulier dont le côté est 1 mètre. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 204.)

205. Calculer le rayon d'un cercle à moins de $0^m,001$, sachant que la surface de ce cercle surpasse la surface de l'hexagone régulier inscrit d'une quantité égale à $62^{mq},25$. (Sorbonne, 1859.)

206. Le périmètre d'un hexagone régulier étant égal à 10 mètres, calculer à 1 centimètre carré près la surface du cercle inscrit. (Sorbonne, 1860.)

207. Calculer à 1 millimètre près le rayon d'un cercle, sachant que la surface de l'octogone régulier inscrit surpasse de 1 mètre carré la surface de l'hexagone régulier inscrit. (Sorbonne, 1860.)

208. Étant donné un hexagone régulier, on demande de construire un triangle équilatéral qui lui soit équivalent en surface (Sorbonne, 1861.)

209. On a deux octogones réguliers qui sont respectivement de $58^m,35$ et de $37^m,28$. On demande de calculer à 0,01 près le côté d'un troisième octogone régulier, dont la surface égale la somme des surfaces des deux premiers. (Sorbonne, 1860.)

210. Quelle est la surface du cercle circonscrit au triangle équilatéral dont le côté est de 6 mètres? Quelle est la surface du cercle inscrit dans le même triangle? (Sorbonne, 1864.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 210.)

211. Calculer à 0,01 près le rapport de la surface d'un triangle équilatéral à la surface du cercle circonscrit. (Sorbonne, 1865.)

212. Calculer à 0,01 carré près la surface de l'un des trois segments qui sont compris entre la circonférence d'un cercle de 8 mètres de rayon et le triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. (Sorbonne, 1865.)

213. Étant donné le côté d'un décagone régulier circonscrit à un cercle, calculer le côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 213.)

214. Calculer à 0,01 près le rapport de la surface d'un triangle équilatéral à celle du cercle circonscrit à ce triangle. (Sorbonne, 1866.)

215. Calculer la surface d'un triangle équilatéral, sachant que le rayon du cercle inscrit est de $142^m,25$. (Sorbonne, 1870.)

216. Calculer à 0,001 près le périmètre d'un octogone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est $3^m,50$. (Sorbonne, 1866.)

217. Trouver le rapport de la surface de l'hexagone régulier circonscrit à un cercle à celle du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 217.)

218. Le rayon d'un cercle inscrit dans un triangle équilatéral est égal à $1^m,25$. On demande la longueur du rayon du cercle circonscrit au même triangle. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 218.)

219. Construire avec la règle et le compas le côté d'un triangle équilatéral équivalent à un carré donné. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 219.)

220. Étant donné le côté a d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, calculer le côté d'un polygone régulier d'un nombre double de côtés. On calculera le périmètre de l'octogone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité. (Sorbonne, 1870.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 220.)

221. Trouver la surface d'un décagone régulier en fonction du rayon du cercle circonscrit. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 221.)

222. On donne le rayon R d'un cercle; exprimer au moyen de ce rayon : 1° la surface du décagone régulier inscrit dans le cercle; 2° la surface du dodécagone régulier circonscrit. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 222.)

223. Deux cercles A et B sont tangents extérieurement en C, et leurs rayons ont pour longueurs a et $3a$. On demande : 1° de calculer l'angle que la tangente commune extérieure DE fait avec la ligne des centres AB; 2° de trouver l'expression de l'aire DCE comprise entre cette tangente et les deux circonférences. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 223.)

224. Calculer la surface du polygone régulier de vingt-quatre côtés, inscrits dans un cercle de rayon égal à l'unité. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 224.)

CHAPITRE VI.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES SUR LES QUATRE PREMIERS LIVRES.

225. Sur deux droites rectangulaires on fait glisser une droite de longueur constante; on demande le lieu décrit par le milieu de cette droite. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 225.)

226. Trouver le lieu géométrique des points dont les distances à deux droites données sont dans un rapport constant. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 226.)

227. On donne une droite XY et un point A. On mène deux systèmes de droites AB, AB′ aboutissant à XY, et un autre système AC, AC′ faisant avec les premières un angle constant, et tel que $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{m}{n}$; trouver le lieu des points C, C′, etc. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 227.)

228. Étant donnés une droite AB et un point O, on mène par le point O une droite OM et l'on prend sur cette droite le point N, de telle sorte que $OM \times ON$ soit égal à un carré donné a^2. Trouver le lieu des points N. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 228.)

229. Trouver le lieu géométrique des sommets C de triangles qui ont même base AB, et la médiane issue du point A de même longueur. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 229.)

230. On demande le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux points donnés soit égale à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 230.)

231. On demande le lieu des points tels que la différence de leurs distances à deux points donnés soit égale à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 231.)

232. Trouver le lieu des points tels que leurs distances à la base d'un triangle isoscèle soient moyennes proportionnelles entre leurs distances aux deux autres côtés.

$$\overline{MH}^2 = MI \times MG.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 232.)

233. On demande le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux trois sommets d'un triangle équilatéral soit égale à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 233.)

234. Dans un quadrilatère, on donne trois côtés consécutifs et la longueur d'une diagonale. Trouver le lieu des milieux de la seconde diagonale, et ensuite le lieu des milieux de la droite qui joint les milieux des diagonales. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 234.)

235. D'un point A pris sur une droite, on mène une droite AB jusqu'à une parallèle; en B on mène BC perpendiculaire à AB. En C on fait l'angle ACD double de CAB. De A on abaisse AD perpendiculaire à DC. Trouver le lieu des points D, quand la direction de AB change. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 235.)

236. Sur une droite indéfinie on prend deux longueurs et l'on demande le lieu des points d'où l'on voit ces deux longueurs sous le même angle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 236.)

237. Par un point quelconque d'une circonférence on mène une droite parallèle à une direction donnée, et l'on prend sur cette droite une longueur donnée. Trouver le lieu des extrémités de la droite ainsi menée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 237.)

238. On donne deux cercles. Trouver le lieu des points d'où ces cercles sont vus sous des angles égaux. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 238.)

239. Soit MNP un cercle quelconque; prenez à volonté un point A dans le plan de ce cercle; menez par ce point autant de droites que vous voudrez terminées aux points M, N, P, ... de la circonférence, puis partagez ces droites en parties propor-

tionnelles. Il faut démontrer que les points de division x, y, z, ... seront tous situés sur une même circonférence. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 239.)

240. On donne un cercle et un point extérieur; on mène par ce point une sécante que l'on divise de manière que les deux parties soient dans un rapport constant. Trouver le lieu géométrique des points de division. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 240.)

241. On donne un cercle; d'un point quelconque pris sur le prolongement d'un diamètre on mène une tangente; sur la bissectrice de l'angle du diamètre et de la tangente on abaisse une perpendiculaire : on demande le lieu du pied de cette perpendiculaire. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 241.)

242. Par un point O pris sur la circonférence d'un cercle, on mène des cordes OA, OB, OC, OD, ..., qu'on prolonge jusqu'en A', B', C', D', ..., de quantités égales à elles-mêmes. On demande de prouver que tous les points A', B', C', D', ..., sont sur une seconde circonférence de cercle. On demande en outre quel est le rapport des surfaces des deux cercles. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 242.)

243. Prouver que, quand plusieurs cordes d'un cercle, prolongées suffisamment, concourent au même point, leurs milieux sont sur la circonférence d'un autre cercle. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 243.)

244. On donne une circonférence et un point fixe A sur cette circonférence; on mène par le point A une droite qui coupe la circonférence en M; sur AM prolongé, s'il le faut, on prend MN tel que AM $\times$ AN égale un carré donné a^2. Trouver le lieu des points N. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 244.)

245. Dans un angle droit on donne une droite AB et un point sur cette droite. Par ce point on mène une droite de direction quelconque ECD. On fait passer par les points A, C, E et par C, D, B deux circonférences. Trouver le lieu des points P de rencontre de ces circonférences. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 245.)

246. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés

des tangentes menées de chacun d'eux à deux circonférences données soit égale à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 246.)

247. Trouver le lieu géométrique des points tels que la différence des carrés des tangentes menées de ces points à deux circonférences données soit égale à un carré donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 247.)

248. On donne un cercle et un de ses diamètres; par l'une des extrémités on mène une sécante que l'on prolonge d'une quantité égale à elle-même. On joint le centre à l'extrémité de la droite ainsi obtenue, et la deuxième extrémité du diamètre au deuxième point d'intersection de la sécante. Trouver le lieu des points de rencontre de ces droites. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 248.)

249. Étant donné un diamètre dans un cercle, on mène un rayon quelconque, et sur ce rayon on porte à partir du centre une longueur égale à la perpendiculaire abaissée de son extrémité sur le diamètre fixe. Trouver le lieu des points ainsi obtenus sur le rayon variable. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 249.)

250. Par un point pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante, puis les deux tangentes aux points d'intersection. Trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 250.)

251. Par le point de contact de deux cercles, on mène des cordes dont le rapport est constant. Trouver le lieu géométrique du point de rencontre des perpendiculaires abaissées des centres sur ces cordes. (Concours général de 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 251.)

252. Deux cercles O et O′ extérieurs l'un à l'autre étant donnés, on propose : 1° de trouver sur la ligne des centres O et O′ le point P tel que les tangentes PS et PS′ menées aux deux circonférences soient égales; 2° de démontrer que la propriété du point P appartient aussi à chaque point Q de la ligne MN menée par le point P perpendiculairement à la ligne des centres, en sorte que les tangentes QT et QT′ menées aux deux cercles soient égales entre elles. (Sorbonne, 1860). (*Voy.* ATLAS, *fig.* 252.)

CHAPITRE VII.

PROBLÈMES SUR LE CINQUIÈME LIVRE.

DROITES ET PLANS.

253. On suppose que trois droites partant d'un même point O font entre elles les angles suivants : 110°, 113°, 137°. Dire si les trois droites sont ou non dans le même plan et démontrer la chose affirmée. (Sorbonne, 1868.)

254. Par un point pris sur un plan ou hors de ce plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan. Soient AB une perpendiculaire au plan MN et BC une droite quelconque tracée dans ce plan par le pied B; supposons AB = 850 mètres et BC = 800 mètres. On propose de calculer AC. (Sorbonne, 1858.)

255. Décrivez un cercle avec un rayon de 13 mètres; au-dessus du plan de ce cercle, élevez une perpendiculaire OP égale à 17 mètres; menez encore une tangente MN au cercle, et sur cette tangente, à partir du point de contact, prenez une longueur MN égale à 24 mètres. On propose de calculer à 1 centimètre près la distance PN. (Sorbonne, 1858.)

256. Soit AB, BC, CD une suite de droites situées dans le même plan; on prend un point M hors de ce plan, puis on mène MN parallèle à AB, NP parallèle à BC et PQ parallèle à CD. On propose de démontrer que les droites MN, NP, PQ sont dans un même plan, lequel est parallèle au plan ABCD. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 256.)

256 *bis*. Étant donnée une droite oblique à un plan, comment varie l'angle qu'elle fait avec une droite mobile tracée par son pied dans le plan? (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 256 *bis*.)

THÉORÈMES DONNÉS EN COMPOSITION.

Droites et plans perpendiculaires.

Démontrer que, si une droite située en dehors d'un plan est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans le plan, elle sera perpendiculaire à toute autre droite menée par son pied dans le même plan. (Sorbonne, 1854, 1865.)

Par un point pris sur un plan ou hors de ce plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan. (Sorbonne, 1854, 1861, 1862, 1873, 1875.)

Soient AB une droite perpendiculaire au plan MN et BC une droite quelconque tracée dans ce plan par le pied B. Supposons AB = 850 mètres, BC = 800 mètres. On propose de calculer l'oblique AC. (Sorbonne, 1858, 1861, 1862.)

Parallélisme des droites et des plans.

Démontrer que deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. (Sorbonne, 1862, 1863, 1864, 1866, 1867, 1869, 1873, 1875.)

Démontrer que deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. On énoncera et l'on démontrera aussi la réciproque de ce théorème. (Sorbonne, 1865.)

Démontrer que, si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un d'eux sera perpendiculaire à l'autre. (Sorbonne, 1855, 1865, 1871, 1874.)

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est aussi perpendiculaire au plan. (Sorbonne, 1855, 1868, 1871.)

Démontrer que deux droites parallèles à une troisième sont

parallèles entre elles. On suppose que les trois droites ne sont pas dans le même plan. (Sorbonne, 1862.)

Démontrer que deux droites comprises entre trois plans parallèles sont coupées en parties proportionnelles. Cette proposition comporte-t-elle une réciproque? (Sorbonne, 1864.)

Mesure des angles dièdres.

Exposer la mesure des angles dièdres et démontrer les propositions qui s'y rattachent. (Sorbonne, 1853.)

Démontrer que l'angle dièdre a pour mesure l'angle rectiligne correspondant. (Sorbonne, 1855.)

Mener par un point O situé dans l'espace, à 1 mètre au-dessus d'un plan horizontal, des plans faisant tous avec ce plan horizontal des angles de 45°. Démontrer que les traces de ces plans sur le plan horizontal sont toutes tangentes à une même circonférence de cercle. Quel est le rayon de cette circonférence? (Sorbonne, 1854.)

Plans perpendiculaires entre eux.

Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan mené par cette droite est perpendiculaire à ce plan. (Sorbonne, 1869.)

Prouver que, si deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection l'est aussi. (Sorbonne, 1863, 1865, 1868.)

Angles trièdres.

Démontrer que deux angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties, lorsque les angles plans de l'un sont respectivement égaux aux angles plans de l'autre. (Sorbonne, 1866.)

Deux angles trièdres qui ont leurs trois faces égales chacune à chacune ont aussi les angles dièdres respectivement égaux. (Sorbonne, 1868, 1870, 1874.)

Propriétés de l'angle trièdre supplémentaire.

Définition et propriétés des angles trièdres supplémentaires. (Sorbonne, 1866, 1869, 1870, 1871, 1872, 1875.)

Faces et angles dièdres des angles trièdres et polyèdres.

Démontrer que, dans un angle trièdre, la plus grande face est inférieure à la somme des deux autres. (Sorbonne, 1862, 1863, 1866.)

Démontrer que, dans un angle trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres. (Sorbonne, 1862, 1863, 1864, 1868, 1870.)

Démontrer que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits. (Sorbonne, 1866, 1868.)

CHAPITRE VIII.

PROBLÈMES SUR LE SIXIÈME LIVRE.

POLYÈDRES.

257. Soit S un angle solide formé par les trois faces rectangulaires ASB, ASC et BSC; prenez sur les côtés de cet angle solide les distances $SA = a$, $SB = b$ et $SC = c$, puis faites passer un plan par les trois points ABC. On forme ainsi une pyramide triangulaire dont on propose de trouver le volume. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 257.)

258. Les bases d'un tronc de pyramide sont deux hexagones réguliers, ayant respectivement 1 mètre et 2 mètres de côté; on demande de calculer la hauteur, sachant que le volume du tronc de cône a 12 mètres cubes. (Sorbonne, 1858.)

259. Le volume d'un tronc de pyramide est de $23^{mc},237$; la hauteur de ce tronc est de $4^{m},235$, et la base inférieure de $10^{mq},278$; on demande de calculer la base supérieure du tronc à 0,0001 près de sa valeur. (Sorbonne, 1858.)

260. Étant donnée une pyramide SABC, on mène un plan parallèle à la base ABC, lequel forme la petite pyramide *Sabc*; on demande à quelle distance de la base doit être mené ce plan, pour que le volume de cette dernière pyramide soit $\frac{1}{3}$ du tronc de pyramide compris entre les deux bases. (Sorbonne, 1858.)

261. Un prisme droit est donné, lequel a une hauteur de 38 489 mètres. Sur l'une des arêtes, à partir de la base, on

prend une hauteur représentée par x; sur une autre arête, on prend une hauteur de 50 mètres de plus, et sur la troisième une hauteur de 120 mètres de plus; par les extrémités de ces trois hauteurs, on mène un plan, lequel divise le volume du prisme en deux parties. Comment faut-il prendre la première hauteur, pour que les deux parties soient équivalentes? (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 261.)

262. Si l'on coupe une pyramide SABCDE par un plan parallèle à une base, la section *mnpqr* sera un polygone semblable à la base. Soit

$$SA = 15^m, \quad SM = 10^m, \quad \text{surf. } ABCDE = 375^{mq};$$

on propose de calculer la surface *mnpqr*. (Sorbonne, 1859.)

263. Une pyramide SABC, dans laquelle l'arête SA $= 24^m,638$, est coupée par un plan *abc* parallèle au plan de sa base, de manière que le volume de la petite pyramide S*abc* soit le dixième du volume de la pyramide totale SABC; on demande de calculer à $0^m,001$ près la longueur S*a*. (Sorbonne, 1859.)

264. Démontrer que le volume d'un parallélépipède quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur. On suppose que le volume du parallélépipède soit de 188 mètres cubes et que la base soit 533 mètres carrés; on veut connaître la hauteur du parallélépipède. (Sorbonne, 1860.)

265. La base d'une pyramide régulière est un hexagone régulier, dont le côté est égal à 3^m; calculer à $0^m,001$ près la hauteur qu'il faut donner à cette pyramide pour que sa surface latérale soit égale à dix fois la surface de la base. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 265.)

266. Calculer le poids de l'obélisque qui a la forme d'un tronc de pyramide à base carrée, sachant que les côtés des deux bases du tronc sont de $1^m,83$ et de $0^m,75$ et que sa hauteur est de $67^m,15$; la densité de la matière de l'obélisque est $2^m,57$ par rapport à celle de l'eau. (Sorbonne, 1864.)

267. Une pyramide SABC, dans laquelle l'arête SA $= 24^m,638$, est coupée par un plan *abc* parallèle à sa base, de telle façon que

le volume de la pyramide S*abc* soit le $\frac{1}{10}$ du volume de la pyramide totale SABC. Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la longueur S*a*. (Sorbonne, 1864.)

268. Étant donnée une pyramide SABC, on mène un plan parallèle à la base ABC, lequel forme une pyramide S*abc*; on demande à quelle distance de la base doit être mené ce plan pour que cette petite pyramide soit $\frac{1}{7}$ du tronc de pyramide compris entre les deux bases ABC et *abc*. (Sorbonne, 1868.)

269. Une pyramide SABC, dans laquelle SA est égal à $24^m,638$, est coupée par un plan *abc* parallèle au plan de sa base, de manière que le volume de la petite pyramide S*abc* soit le $\frac{1}{10}$ du volume de la pyramide SABC; on demande de calculer à 1 millimètre près la hauteur. (Sorbonne, 1870.)

270. Volume d'un tétraèdre régulier en fonction de l'arête *a*. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 270.)

271. On considère un solide à deux bases horizontales rectangulaires ABCD, A'B'C'D'; les faces latérales sont des trapèzes. On demande : 1° d'évaluer le volume de ce solide, connaissant les arêtes des deux bases et leur distance; 2° d'indiquer la condition qui doit être remplie pour que ce solide soit un tronc de pyramide, c'est-à-dire pour que les arêtes AA', BB', CC', DD' aillent concourir en un même point. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 271.)

272. Calculer le volume et la surface de l'octaèdre qui a pour sommets les centres des faces d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont *a*, *b*, *c*. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 272.)

273. Calculer le volume d'un tétraèdre régulier et le rayon de la sphère inscrite, connaissant le côté *a* du tétraèdre. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 273.)

274. Étant donnés la hauteur SO et le côté SA d'un cône circulaire droit, calculer la hauteur OI d'un cylindre circulaire droit CDFE inscrit dans le cône, de telle sorte que la surface latérale du cylindre droit soit égale à la surface latérale du cône SCD. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 274.)

275. La base d'une pyramide régulière est un triangle équilatéral dont le côté est a. La hauteur de la pyramide est $2a$. A quelle distance de la base ABC faut-il mener un plan parallèle DEF pour que la surface du triangle DEF soit égale à la surface latérale du tronc de pyramide ABCDEF? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 275.)

275 *bis.* Calculer le volume d'une pyramide triangulaire dont toutes les arêtes ont une même longueur donnée a. (Sorbonne, 1875.)

CHAPITRE IX.

PROBLÈME SUR LE SEPTIÈME LIVRE.

276. Démontrer que par quatre points non situés dans le même plan, et dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite, on peut toujours faire passer une sphère, et qu'on ne peut en faire passer qu'une. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 276.)

CHAPITRE X.

PROBLÈMES SUR LE HUITIÈME LIVRE.

1° PROBLÈMES SUR LE CYLINDRE ET LE CONE.

277. Trouver un cylindre de la contenance de 1 hectolitre et dont la hauteur soit égale au diamètre de la base. (Sorbonne, 1853.)

278. Établir la proposition suivante : Lorsque l'apothème d'un tronc de cône égale la somme des rayons des bases, la moyenne géométrique entre ces rayons donne toujours la moitié de la hauteur, et l'on obtient le volume en multipliant la surface totale par le $\frac{1}{6}$ de cette hauteur. (Sorbonne, 1857.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 278.)

279. Le volume d'un cône droit est de $\frac{1}{3}$ de mètre cube; le rayon de la base est 1 mètre. On demande la surface latérale de ce cône. (Sorbonne, 1858.)

280. Donner l'expression de la surface latérale d'un tronc de cône à bases parallèles et la démontrer. Calculer en particulier, à 1 décimètre carré près, la surface latérale d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base supérieure est 2 mètres, celui de la base inférieure 6 mètres, et la hauteur 3 mètres. (Sorbonne, 1859.)

281. Un cône dont la base a son rayon égal à 2 mètres et dont la hauteur est de 15 mètres est coupé par un plan parallèle à la base et distant du sommet de 12 mètres ; on demande la surface latérale du tronc du cône. (Sorbonne, 1859.)

282. Quel doit être le rayon de la base d'un cylindre de $5^m,25$ de hauteur, pour que son volume soit de 20 mètres cubes? (Sorbonne, 1859.)

283. Le volume d'un tronc de cône est de $743^{mc},550$, la hauteur est de $1^m,215$, le rayon de la base inférieure est $13^m,937$; on demande de calculer le rayon de la base supérieure à $0^m,001$ près. (Sorbonne, 1859.)

284. Étant donnée une sphère de rayon R, on veut construire un cône droit qui ait même volume que la sphère et dont la hauteur ne soit que la moitié du rayon de la sphère; quelle devra être la base? (Sorbonne, 1859.)

285. La hauteur d'un cylindre est égale à $2^m,35$; on propose de calculer le rayon à 1 centimètre près, sachant que la somme de la surface latérale et des surfaces des deux bases est égale à la surface d'un cercle de $3^m,24$ de rayon. (Sorbonne, 1859.)

286. La hauteur d'un tronc de cône est h, les diamètres de ses deux bases sont $0^m,4$ et $0^m,22$; on demande quel diamètre il faudrait donner à un cylindre de même hauteur h pour que son volume fût équivalent à celui du cône tronqué. (Sorbonne, 1859.)

287. Le volume d'un tronc de cône est équivalent à celui d'une sphère de 5 mètres de rayon, la hauteur est égale à 8 mètres, le rayon de l'une des bases est égal à 7 mètres; calculer le rayon de l'autre base. (Sorbonne, 1859.)

288. S'il faut 1 centimètre cube d'or pour dorer la surface latérale d'un cylindre ayant $0^m,75$ de hauteur et $0^m,2$ de rayon, quelle sera l'épaisseur supposée constante de la couche d'or? (Sorbonne, 1860.)

289. Les rayons des deux bases d'un tronc de cône sont égaux respectivement à $7^m,25$ et à $9^m,48$; sa hauteur est égale à $4^m,3$; par quelle longueur doit-on multiplier la surface latérale de ce tronc de cône pour en avoir le volume? (Sorbonne, 1860.)

290. Un cône dont la hauteur est 82 mètres est partagé par

deux plans parallèles au plan de sa base en trois parties de volume équivalent; calculer à $0^m,001$ près les distances des deux plans sécants au sommet du cône. (Sorbonne, 1860.)

291. Quel est le rapport des rayons des deux bases d'un tronc de cône dont le volume est égal à la moitié du volume du cylindre de même hauteur, ayant pour base la plus grande des deux bases du tronc de cône? (Sorbonne, 1860.)

292. On donne les hauteurs H et H′ de deux cylindres, et l'on propose de déterminer les rayons de ces cylindres de manière que la somme de leurs surfaces latérales soit égale à celle d'une sphère de rayon A, et que la somme de leurs volumes soit le plus petite possible. (Sorbonne, 1860.)

293. Un tronc de cône a pour rayons de bases $7^m,25$ et $9^m,48$, et pour hauteur $4^m,3$. Quel est le rapport de son volume à sa surface latérale? (Sorbonne, 1864.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 293.)

294. Quel est le rapport des rayons des deux bases d'un tronc de cône dont le volume est la moitié de celui du cylindre de même hauteur et ayant pour base la plus grande des deux bases du tronc de cône? (Sorbonne, 1864.)

295. La surface latérale d'un tronc de cône est de 3454 décimètres carrés; les rayons de ses bases sont $1^m,42$ et $0^m,64$. Calculer sa hauteur. (Sorbonne, 1865. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 295.)

296. Un cône de 82 mètres de hauteur est partagé en trois volumes équivalents par deux plans parallèles à sa base; calculer à 0,001 près leurs distances au sommet. (Sorbonne, 1864.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 296.)

297. Étant donnée la hauteur d'un cône, la partager en trois parties, de façon que les plans parallèles à la base menés par les points de division partagent sa surface latérale en trois parties équivalentes. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 297.)

298. A quelle distance x des points A et B faut-il mener les plans CD et EF pour que le volume du cylindre CDFE soit égal à la somme des volumes des deux segments CAD et EBF? (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 298.)

299. Un rouleau cylindrique de chêne a $0^m,3$ de diamètre et $2^m,5$ de long; le poids spécifique du chêne est 1,17. On demande son volume et son poids. (Sorbonne, 1865.)

300. Quel est le rapport des deux bases d'un tronc de cône dont le volume est la moitié de celui du cylindre de même hauteur et ayant pour base la plus grande des deux bases du tronc. (Sorbonne, 1866.)

301. Le rayon d'une sphère étant égal à 1, calculer à 1^{mm} près la hauteur d'un cône dont la base est un petit cercle, dont le sommet est au centre de la sphère et qui a pour surface latérale $\frac{1}{10}$ de celle de la sphère. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 301.)

302. Le rayon intérieur d'une tour ronde est $1^m,3$, son épaisseur est 0,5 et le volume de maçonnerie qui le compose est $94^{mc},9677$. On demande sa hauteur. (Sorbonne, 1866.)

303. Le rayon de la base d'un cône est r, sa hauteur est h; déterminer la distance au sommet d'un plan parallèle à la base et qui détache du solide un cône dont la surface totale est égale à la surface latérale du cône donné. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 303.)

304. Calculer les rayons de deux bases d'un tronc de cône, connaissant l'arête A du tronc, sachant que cette arête fait un angle de 60 degrés avec le plan de la base inférieure, et que la surface totale du tronc est égale à celle d'une sphère ayant pour diamètre l'arête A. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 304.)

305. Calculer la surface totale d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base supérieure est égal à 1 mètre, le rayon de la base inférieure égal à 2 mètres et la hauteur égale à 1 mètre. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 305.)

306. Un cylindre et un tronc de cône ont une base commune et la même hauteur. On demande quel doit être le rapport des rayons des deux bases du tronc de cône pour que le volume de ce tronc soit égal à la moitié du volume du cylindre. On calculera la valeur de ce rapport à 0,001 près. (Sorbonne, 1871.)

307. Les rayons des deux bases d'un tronc de cône sont de $3^m,5$ et de $7^m,3$, la hauteur du tronc est de 2^m. On demande de calculer la surface latérale et le volume du cône entier. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 307.)

308. Étant donnés le rayon R de la base d'un cône, sa hauteur H, à quelle distance X du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base pour que le volume du tronc de cône soit égal à deux fois celui de la sphère qui aurait pour diamètre X? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 308.)

309. Calculer la surface totale et le volume d'un tétraèdre régulier circonscrit à une sphère de rayon donné. (Sorbonne, 1870.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 309.)

310. Étant donnés le rayon OA de la base et le côté SA d'un cône circulaire droit, à quelle distance SC du sommet faut-il mener un plan DE parallèle à la base pour que la surface totale du cône SDE soit égale à la surface totale du tronc de cône ABED? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 310.)

311. Un cône est circonscrit à une sphère donnée, et sa hauteur est double du diamètre de la sphère. Démontrer que la surface totale du cône est double de celle de la sphère. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 311.)

312. Quelle doit être la hauteur SA d'un cône circulaire droit, circonscrit à une sphère de rayon donné, pour que le rapport de la surface totale du cône à la surface de la sphère soit égal à un nombre donné *m*? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 312.)

313. Étant donné un tronc de cône circulaire droit ABDC, dont le rayon OA de la base inférieure est double du rayon O'C de la base supérieure, calculer la distance OE à laquelle il faut mener un plan parallèle aux bases, de manière que la somme des volumes du cône OFG et du tronc de cône supérieur FGDC soit la moitié du volume du tronc de cône proposé. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 313.)

314. Étant donnés une sphère et un diamètre AB, à quelle distance OC du centre faut-il mener un plan DE perpendiculaire

à ce diamètre, pour que la surface latérale du cône SDE circonscrit à la sphère suivant la circonférence DE soit égale à la surface latérale du cône qui a pour base ce même cercle DE et pour sommet l'extrémité A du diamètre AB? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 314.)

315. Étant donnés une sphère et un diamètre AB, à quelle distance AC du point A faut-il mener un plan DE perpendiculaire à ce diamètre, pour que la surface de la calotte sphérique DAE soit égale à la surface latérale du cône dont le sommet est en B et qui a pour base le cercle DE. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 315.)

316. Étant donné un hémisphère, trouver le rayon CD d'un cercle DE parallèle à la base AB de l'hémisphère, et tel que le rapport du volume du tronc de cône ABED à celui de la sphère qui a pour diamètre la distance OC des deux plans parallèles soit égal à un nombre donné m. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 316.)

317. Calculer les rayons AB, CD des bases d'un tronc de cône circonscrit à une sphère de rayon donné, sachant que le rapport de la surface totale du tronc de cône à la surface de la sphère est égal à un nombre donné m. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 317.)

318. Connaissant les rayons a, b des deux bases d'un tronc de cône et sa hauteur h, déterminer sur la droite qui joint les centres des deux bases un point s tel, que les deux cônes ayant ce point pour sommet et pour bases respectives les deux bases du tronc de cône aient leurs surfaces latérales équivalentes. (Sorbonne, 1873.) *Voy.* ATLAS, *fig.* 318.)

319. Étant donnée la hauteur d'un cône, la partager en trois parties, de façon que les plans parallèles à la base, menés par les points de division, partagent la surface latérale du cône en trois parties équivalentes. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 319.)

320. A quelle distance x du centre d'une sphère faut-il mener un plan CD perpendiculaire au diamètre AB $= 2R$ pour que les surfaces latérales des deux cônes, ayant A et B pour sommets et

le petit cercle CD pour base commune, soient entre elles comme deux nombres donnés m, n? (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 320.)

321. Calculer le rayon x de la base et le côté y d'un cône, sachant que la surface totale du cône est égale à πa^2 et que la surface du triangle rectangle qui engendre le cône est égale à $2b^2$. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 321.)

2° PROBLÈMES SUR LES VOLUMES ET LES SURFACES DE RÉVOLUTION.

322. Dans le parallélogramme ABCD, on a le côté AB $= 25^m,387$, le côté AC $= 14^m,275$, l'angle A $= 30°25'18''$; on demande de calculer le volume du solide engendré par le parallélogramme tournant autour du côté AB. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 322.)

323. Dans un cercle donné, mener à angle droit deux diamètres AB et CD; par le point A, mener la tangente AE et aussi la corde CB, que l'on prolongera jusqu'à son intersection E avec la tangente. Entre les droites AE, EC et l'arc AC, une certaine figure est comprise. On suppose que cette figure fait une révolution complète autour de AB. On veut connaître le volume ainsi engendré par cette figure. — Désigner le rayon par R, et, après avoir trouvé la formule, on l'appliquera au cas de R $= 13549^m$. Effectuer le calcul par logarithmes en faisant $\pi = 3,1416$. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 323.)

324. Un cercle est donné, dont le rayon est représenté par R; on prend sur le diamètre AB une longueur AM représentée par H; on élève au point M la demi-corde MP perpendiculaire à AB; on mène aussi au point B la tangente BX, puis on abaisse PQ perpendiculaire à cette tangente. Les choses étant ainsi, considérons le contour APQ, composé de la droite PQ et de l'arc AP, puis imaginons que APQ fasse une révolution autour du diamètre AB

On demande la surface engendrée par ce contour. Après avoir trouvé la formule, on y fera $R = 2^m,8$; $H = 0^m,7$. Pour le rapport π, on prendra la valeur d'Archimède $\frac{22}{7}$. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 324.)

325. Soit ABC un triangle équilatéral dont le côté est égal à a; on prolonge la base BC d'une quantité $CD = a$; on élève la perpendiculaire DE, puis on suppose que le triangle fait une révolution autour de l'axe DE; il faut trouver l'expression du volume ainsi engendré. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 325.)

326. Par un point S pris sur le prolongement du diamètre d'un cercle, on mène une tangente SA, et l'on fait tourner le cercle autour de son diamètre; la circonférence décrit une sphère, et la tangente SA décrit un cône dont la base est le cercle décrit par la perpendiculaire AP au diamètre OS; on demande de déterminer le volume et la surface de ce cône.

Application : le rayon $OA = 0^m,035$, et la distance OS du point S au centre $= 0^m,125$. (Sorbonne, 1859.)

327. Dans un triangle ABC, on a $AB = 23^m,215$, $AC = 21^m,107$, l'angle $CAB = 23°27'30'',2$; on demande de calculer le volume engendré par le triangle tournant autour de son côté AB. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 327.)

328. On a, dans le triangle ABC, $AB = 2^m,314$, $AC = 3^m,087$, l'angle $BAC = 30°25'30''$; calculer le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de AX par le point A, perpendiculairement au côté AB. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 328.)

329. Calculer le volume du solide décrit par un triangle équilatéral ABC, qui tourne autour d'une droite xy menée dans son plan, passant par le sommet A, de manière à faire avec AC un angle de 18°. On supposera le côté du triangle égal à $7^m,35$. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 329.)

330. Le côté du carré BCDE est de $13^m,217$; sur le côté BE de ce carré on construit un triangle équilatéral ABE, qui forme avec le carré donné le pentagone ABCDE; on propose de calculer le volume engendré par le pentagone en tournant autour du

côté AB du triangle équilatéral. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 330.)

331. Soit ABCD un rectangle; dans le plan de ce rectangle, on trace une droite MN parallèle au côté AB et en dehors du rectangle, puis on suppose que le rectangle fasse une révolution autour de MN. Il faut démontrer que le volume engendré par le rectangle est égal à la surface de ce rectangle multipliée par la circonférence décrite par le point d'intersection des deux diagonales. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 331.)

332. Soit MNAB un trapèze dans lequel les angles A et B sont droits; dans l'intérieur de ce trapèze, décrivez sur AB un demi-cercle, puis supposez que la figure fasse une révolution autour de AB; quel sera le volume décrit par l'aire comprise entre le demi-cercle et les trois côtés AM, MN, BN? (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 332.)

333. Un cercle étant donné, dont le rayon est de 20^m, mener par le milieu B d'un rayon OA une corde MN perpendiculaire à ce rayon; puis, au point M, mener la tangente qui va couper le prolongement du rayon au point P; alors on suppose que le triangle PMB fasse une révolution autour de OP; on demande le volume engendré par le triangle. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 333.)

334. Soit ABCD un rectangle; par le milieu E du côté BC menez une droite qui coupe DC au point N et le prolongement de AB au point M; on suppose que la figure fait une révolution autour de AD, et l'on propose de calculer le rapport des deux volumes décrits par les triangles BEM et ECN. On représentera $AB = a$ et $BM = b$. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 334.)

335. Calculer le volume engendré par un triangle équilatéral dont le côté est égal à $2^m,5$ et qui tourne autour d'un de ses côtés. (Sorbonne, 1860.)

336. Un triangle équilatéral de $5^m,93$ de côté tourne autour d'une droite parallèle à sa base menée par son sommet; on demande de calculer le volume du solide engendré par le triangle. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 336.)

337. Un rectangle ABCD étant donné, mener les diagonales AC, BD et mener aussi AM parallèle à BD. Concevez alors que le rectangle fasse une révolution autour de AM. On représente par a et b les deux côtés du rectangle et l'on propose de trouver, au moyen de ces données, les volumes décrits par les quatre triangles ABC, ACD, ABD, BDC. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 337.)

338. Par le sommet A d'un carré ABCD, dont le côté est égal à $3^m,575$, on mène la droite AX, faisant avec le côté AB un angle BAX égal à 60°; calculer à $\frac{1}{10000}$ près de sa valeur le volume engendré par le carré tournant autour de la droite AX. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 338.)

339. Les deux côtés d'un rectangle ABCD ont pour longueur $AB = 4^m$, $BC = 3^m$; calculer à 1 décimètre cube près le volume engendré par la révolution de la surface du rectangle autour d'un axe EF passant par le sommet A et perpendiculaire à la diagonale AC. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 339.)

340. Calculer à un $\frac{1}{100000}$ près de sa valeur le volume engendré par un hexagone régulier qui tourne autour d'un de ses côtés; on suppose que chaque côté de l'hexagone est de 1 mètre. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 340.)

341. Soit ABCD un rectangle; par le milieu E du côté BC, on mène une droite quelconque qui coupe DC au point N et le prolongement de AB en M. Supposons que la figure fasse une révolution autour de AD. On propose de calculer le rapport des deux volumes décrits par les triangles BEM, ECN, en désignant AB par a et BM par b. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 341.)

342. Calculer le volume engendré par un triangle équilatéral ABC tournant autour d'une droite xy parallèle à BC; le côté AB vaut 1 mètre; la distance CD du côté BC à l'axe xy est aussi de 1 mètre. (Sorbonne, 1865.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 342.)

343. L'angle A du triangle ABC = 45°. Les côtés AB, AC sont respectivement de 5^m et 6^m. Calculer le volume engendré par le triangle tournant autour de la droite AX perpendiculaire à AB. (Sorbonne, 1866.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 343.)

344. Dans le triangle rectangle AOB, le côté AO = 2^m, le côté BO = $1^m,5$. Par le milieu C du côté AO, on mène CD parallèle à BO. Calculer la surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze BOCD tournant autour de AO. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 344.)

345. Calculer le volume d'un solide décrit par le secteur circulaire AOB tournant autour de AO. On supposera que l'angle AOB est de 55° et que le rayon AO est de $7^m,34$. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 345.)

346. Dans le triangle ABC, on a

$$AB = 125^m,215,$$
$$AC = 100^m,385,$$
$$\text{angle } A = 30^\circ\ 15'\ 53''.$$

On demande de calculer le volume qu'engendre ce triangle en tournant autour de la droite PQ menée par le sommet A perpendiculairement au côté AB. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 346.)

347. Un hexagone régulier dont le côté vaut 1^m tourne autour de l'un de ses côtés. Calculer le volume engendré. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 347.)

348. Dans le trapèze ABCD, on a

$$\text{base } AB = 32^m,375,$$
$$\text{base } CD = 17^m,225,$$
$$\text{angle } A = 42^\circ\ 30'\ 27'',$$
$$\text{angle } B = 61^\circ\ 29'\ 13''.$$

On demande le volume engendré par le trapèze tournant autour de sa base AB. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 348.)

349. Rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de deux côtés adjacents. (Sorbonne, 1866.)

350. Dans un demi-cercle de rayon R, on inscrit un demi-octogone régulier. Calculer l'expression du volume du solide décrit par la rotation du demi-octogone autour du diamètre du demi-cercle. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 350.)

351. Un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont respectivement égaux à $3^m,2$ et à $2^m,3$ tourne autour de son hypoténuse. Calculer la surface engendrée par les deux côtés de l'angle droit. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 351.)

352. Calculer les côtés d'un triangle isoscèle, sachant que sa surface est égale à celle d'un carré dont le côté est α, et que la surface engendrée par le périmètre du triangle en tournant autour de la base est égale à celle d'une sphère d'un rayon b. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 352.)

353. On donne une circonférence de diamètre AB. Par le point A, mener une corde AC telle que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, la zone engendrée par l'arc AC soit dans un rapport $\frac{m}{n}$ avec la surface latérale d'un cône engendré par la droite AC. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 353.)

354. Étant donné un cercle, mener une corde AC telle que, si l'on fait tourner la figure autour d'une droite AB, le volume engendré par le segment de cercle AMC soit moitié du volume de la sphère engendrée par le demi-cercle AMB. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 354.)

355. Trouver le volume engendré par un triangle isoscèle tournant autour d'un axe parallèle à sa base. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 355.)

356. Un triangle rectangle tourne autour de son hypoténuse a; trouver l'expression du volume engendré en fonction des côtés b et c. On appliquera la formule au cas où $b=6^m$ et $c=8^m$. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 356.)

357. Un triangle isoscèle ABC, dont la base BC est égale à 6 mètres et le côté AB égal à 9 mètres, tourne autour d'une droite parallèle à BC et menée par le sommet A du triangle. On demande le volume engendré. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 357.)

358. On donne un cercle dont le diamètre $AB=4^m$. Une corde MN égale à 2^m tourne autour du diamètre AB, auquel elle est parallèle. On demande de calculer la surface qu'elle engendre. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 358.)

359. Rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de deux côtés adjacents. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 359.)

360. Les côtés d'un rectangle ABCD ont pour longueur

$$AB = 4^m, \quad BC = 3^m.$$

Calculer à 1 décimètre cube près le volume engendré par la révolution de la surface du rectangle autour d'un axe EF passant par le sommet A et perpendiculaire à la diagonale AC. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 360.)

361. Étant donnés un cercle et un diamètre AB, à quelle distance OC du centre faut-il mener une corde DE perpendiculaire à ce diamètre pour que le volume engendré par le segment AMD, en tournant autour du diamètre AB, soit égal au volume engendré par le triangle OCD? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 361.)

362. Calculer les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et sachant que le solide engendré par la révolution du triangle autour de l'hypoténuse a un volume égal à celui d'une sphère de rayon b. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 362.)

363. Dans un cercle de rayon donné R, on mène une corde DE égale au côté du pentagone régulier inscrit, et l'on fait tourner la figure autour du diamètre AB perpendiculaire à la corde DE; calculer le segment de sphère engendré par le demi-segment ACD. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 363.)

364. Étant donnés un cercle et deux diamètres rectangulaires AB, CH, mener une corde DE parallèle au diamètre AB, de manière que le volume du cylindre engendré par le rectangle DEGF, en tournant autour du diamètre AB, soit égal à celui du solide engendré par le triangle DCE tournant autour du diamètre AB. (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 364.)

365. Calculer le volume engendré par la révolution d'un rectangle dont les dimensions sont a et b, tournant autour d'un axe passant par l'un de ses sommets et perpendiculaire à la diagonale du rectangle. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 365.)

366. Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et sachant que le volume engendré par le triangle tournant autour de l'hypoténuse est égal à celui d'une sphère de rayon donné R. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 366.)

367. Trouver le volume engendré par la rotation d'un segment de cercle autour d'un diamètre, connaissant la corde du segment et sa projection sur le diamètre. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 367.)

368. Soit deux parallèles AB, CD. On joint AD, BC, et l'on demande, étant données les longueurs $AB = a$, $CD = b$, et la distance h de AB et de CD, de calculer : 1° les aires des triangles ABE, ECD, leur somme et leur différence ; 2° les volumes engendrés par ces deux triangles tournant autour de la droite AB. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 368.)

369. Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, connaissant l'hypoténuse BC et sachant que le volume engendré par le triangle tournant autour du côté AB est double du volume engendré par ce même triangle en tournant autour du côté AC. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 369.)

370. On donne le côté a d'un triangle équilatéral ABC, et l'on demande à quelle distance x du côté BC on doit lui mener une parallèle pour que le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de cette parallèle soit équivalent à celui d'une sphère de rayon A. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 370.)

371. On donne l'hypoténuse $BC = a$ d'un triangle rectangle et l'on propose d'en déterminer la hauteur $AD = x$, de façon que, si l'on fait tourner autour de BC le cercle décrit sur cette droite comme diamètre, la somme des volumes engendrés par les deux segments de cercle AMB, ANC soit égale au volume d'une sphère de rayon donné R. Examiner si le problème est toujours possible. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 371.)

372. Deux circonférences dont les rayons sont a et $2a$ se touchent intérieurement. Par le point de contact A, on trace une droite ABC faisant un angle de 45° avec le diamètre AD qui

aboutit à ce point. La figure tournant autour de AD, l'aire AMBCN comprise entre les deux circonférences et la sécante BC engendre un volume qu'on demande d'évaluer. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 372.)

373. Trouver l'angle que la corde AB doit faire avec le diamètre AC mené par une de ses extrémités pour que le volume engendré par la révolution autour de AC du segment du cercle AMB soit les $\frac{9}{16}$ du volume de la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle AMC. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 373.)

374. Soit AB un diamètre d'un cercle de rayon R. A quelle distance AI du point A faut-il mener une corde CD perpendiculaire à AB pour que les volumes engendrés par les deux segments de cercle AMC, CNB, lorsque la figure tourne autour de AB, fassent une somme égale au $\frac{5}{6}$ du volume de la sphère engendrée par le demi-cercle ACB? (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 374.)

375. Dans un triangle rectangle AOB, le côté AO = 2 et le côté BO = 1,5. Par le milieu C du côté AO, on mène CD parallèle à BO; calculer la surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze BOCD tournant autour de AO. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 375.)

3° PROBLÈMES SUR LA SPHÈRE.

376. Deux observateurs situés à bord de deux navires, élevés chacun de 3 mètres au-dessus du niveau de la mer, ont cessé de s'apercevoir mutuellement à une distance de 12 600 mètres. On propose de conclure de cette observation une valeur approchée du rayon de la Terre. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 376.)

377. Caculer à 1 décimètre carré près la surface de la zone sphérique engendrée par un arc de 30°, dont le rayon est $3^m,261$, et qui tourne autour du diamètre passant par une de ses extrémités. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 377.)

378. Calculer en myriamètres carrés la surface de l'une des deux zones glaciales, sachant que le petit cercle est à 23° 30′ du pôle. On suppose que la surface de la Terre est exactement sphérique et que la circonférence d'un grand cercle est 4000 myriamètres. (Sorbonne, 1858.)

379. AB est le diamètre d'une sphère, et l'on veut mener perpendiculairement à ce diamètre deux plans tels que la surface de la sphère soit partagée en trois zones, dont les surfaces soient entre elles comme trois longueurs données m, n, p. Comment déterminer, sur le diamètre AB, les deux points par où doivent passer les deux plans perpendiculaires? (Sorbonne, 1858.)

380. On demande de calculer, à 1 millimètre près, la hauteur d'une zone sphérique, sachant que la surface de cette zone est de $25^{mq},26$ et que le volume de la sphère à laquelle elle appartient est de $405^{mc},23$. (Sorbonne, 1858.)

381. Trouver le volume d'une sphère dans laquelle on connaît la hauteur et la surface d'une zone.

Application : Trouver le volume d'une sphère, étant donnée une zone dont la hauteur est égale à $0^{m},17$ et la surface à 2^{mq} (Sorbonne, 1858.)

382. Le diamètre d'une sphère est égal à 4 mètres; une corde parallèle à ce diamètre est égale à 2 mètres. On demande la surface engendrée par cette corde tournant autour du diamètre. (Sorbonne, 1853.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 282.)

383. Une sphère étant donnée, menez un rayon quelconque et un plan perpendiculaire au milieu de ce rayon : ce plan partagera la sphère en deux segments. Supprimez le petit segment et remplacez-le par un cône droit de même base que ce segment supprimé. On demande à quelle distance doit être placé le sommet du cône pour que le corps, ainsi composé d'un cône et d'une partie sphérique, ait la même surface que la sphère. (Sorbonne, 1858.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 383.)

384. Calculer le nombre de degrés, minutes et secondes que doit contenir un arc de cercle, pour que l'aire de la zone engendrée par la révolution de cet arc autour du diamètre qui le divise en

deux parties égales soit égale à la moitié de l'aire du cercle. (Sorbonne, 1859.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 384.)

385. On demande de démontrer l'expression de la surface de la zone sphérique et de l'appliquer à l'exemple suivant :

Une sphère dont le rayon est de 4^m étant coupée par deux plans parallèles menés d'un même côté du centre, à des distances de ce point de 2^m et de 3^m, quelle est la surface de la zone et quelle est la surface de chacun des deux cercles qui forment ses bases ? (Sorbonne, 1859.)

386. Quelle est la surface d'une sphère de $0^m,21$ de rayon ? On fera le calcul en prenant la valeur $\pi = 3,1416$. (Sorbonne, 1859).

387. La surface totale du cylindre circonscrit à la sphère est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère et la surface totale du cône équilatéral circonscrit.

388. La surface de la sphère est moyenne proportionnelle entre les surfaces engendrées par deux polygones réguliers semblables, d'un nombre pair de côtés, inscrits et circonscrits au même grand cercle, et tournant autour du même diamètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 388.)

389. Le volume du cylindre circonscrit à une sphère est moyen proportionnel entre le volume de la sphère et celui du cône équilatéral circonscrit.

390. Par un point M, situé à la surface d'une sphère, menez un plan qui coupe cette sphère suivant un cercle MNP ; par le même point, menez un second plan qui coupe la sphère suivant un autre cercle MQR ; menez la tangente MX au premier cercle et la tangente MY au second. Démontrer que le plan de ces deux tangentes est perpendiculaire au rayon OM de la sphère (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 390.)

391. Calculer le rapport de la surface de la zone tempérée à la surface entière de la Terre, en supposant la Terre sphérique, et regardant la zone tempérée comme limitée par deux petits cercles, dont l'un est à 23° 30′ du pôle et l'autre à 23° 30′ de l'équateur. (Sorbonne, 1860.)

392. Calculer le volume du secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire OAB autour du rayon OA, sachant que ce rayon est égal à 2 décimètres et que l'angle AOB = 54° 28′. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 392.)

393. La hauteur d'une calotte sphérique (zone à une base) est égale à 32^{mm}, le rayon de la circonférence qui lui sert de base est égal à 45^{mm}. Calculer la surface de la calotte. (Sorbonne, 1860.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 393.)

394. La différence des rayons de deux sphères est égale à $1^{m},75$, et la différence de leurs volumes est de 47^{mc} ; calculer chacun des deux rayons à $0^{m},001$ près. (Sorbonne, 1860.)

395. Calculer à 1^{m} près la longueur d'un arc d'un parallèle terrestre, sachant que la latitude de ce parallèle est de 48°50′, et que la différence des longitudes des deux extrémités de l'arc est égale à 3° 36′ et la circonférence d'un grand cercle égale à 40 000 000 de mètres. (Sorbonne, 1860.)

396. Le rayon d'une sphère étant égal à 1, calculer à 0,001 près la hauteur d'un cône dont la base est un petit cercle, dont le sommet est au centre de la sphère et dont la surface latérale est égale au dixième de la sphère. (Sorbonne, 1860.)

397. Calculer l'angle que doivent faire entre eux deux rayons OA et OB d'un cercle, pour que le volume engendré par la révolution du secteur OAB autour du rayon OA soit le quart du volume de la sphère du même rayon. (Sorbonne, 1861.)

398. Couper une sphère par deux plans parallèles et également éloignés du centre de la sphère, de manière que la somme des aires des deux sections soit égale à l'aire de la zone comprise entre les deux plans. (Sorbonne, 1875, enseignement secondaire spécial, 4e année.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 398.)

399. Calculer à $0^{m},001$ près le rayon d'une sphère d'argent valant 250 francs. La densité de l'argent est 10,474. (Sorbonne, 1867.)

400. Une sphère dont le rayon est de 7^{m} est coupée par deux plans parallèles menés d'un même côté du centre à des distance

de ce point de 3^m et de 5^m; quelle est la surface de la zone comprise entre ces deux plans? quelle est la surface de chacun des cercles qui forment ses bases? — Volume du segment sphérique compris entre les deux plans parallèles. (Sorbonne, 1867.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 400.)

401. Calculer la surface de la zone d'une sphère, de rayon r, vue par un observateur placé à une distance $r+h$ du centre de la sphère. (Sorbonne, 1868.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 401.)

402. Une sphère a 10^m de rayon : on mène un plan sécant à une distance du centre égale à la moitié du rayon; calculer le volume du segment détaché par ce plan. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 402.)

403. 1° Étant données la hauteur d'une zone à une base, sa surface, calculer le volume de la sphère dont cette zone fait partie. $h=0^m,4$, $s=2^{mq}$.

2° Volume du segment sphérique qui a pour base le cercle, base de la calotte sphérique dont on a donné la hauteur et la surface. (Sorbonne, 1874.)

404. Un petit cercle tracé sur une sphère en divise la surface en deux parties, qui sont entre elles comme 3 est à 1; on construit les deux cônes qui ont ce petit cercle pour base commune et les deux pôles pour sommets; calculer le rapport du volume de chacun de ces cônes au volume de la sphère. (Sorbonne, 1869.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 404.)

405. Une sphère dont le rayon a une longueur de 7 mètres est coupée par deux plans parallèles menés d'un même côté du centre à des distances de ce point de 3 mètres et de 5 mètres :

1° Quelle est la surface de la zone comprise entre ces deux plans?

2° Quelle est la surface de chacun des cercles qui forment ses bases?

3° Quel est le volume du segment sphérique compris entre les deux plans parallèles? (Sorbonne, 1872.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 405.)

406. Étant donnée une sphère, mener un plan AB tel que le volume du segment ABC soit égal à celui du cône ADB. Calculer,

à moins de 1 centimètre près, la distance du plan au centre, le rayon de la sphère étant supposé égal à 1 mètre. (Sorbonne, 1871.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 406.)

407. La Terre étant supposée sphérique et la circonférence d'un grand cercle égale à 40000 kilomètres, on demande la surface de la zone comprise entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est égale à 45 degrés. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 407.)

408. Une sphère dont le rayon est de 4 mètres est coupée par deux plans parallèles menés du même côté du centre à des distances de ce point de 2^m et de 3^m; quelle est la surface de la zone? quelle est la surface de chacun des deux cercles qui forment ses bases? (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 408.)

409. L'arête d'un cube est de $0^m,25$. On demande le volume de la sphère circonscrite. On sait que le diamètre de la sphère est la diagonale du cube inscrit. (Sorbonne, 1873.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 409.)

410. On donne une demi-sphère ACB. On circonscrit à cette demi-sphère un cône ayant sa base dans le plan AB et son sommet S sur la perpendiculaire à ce plan mené par le centre O de la sphère. Déterminer la hauteur OS de ce cône, de telle sorte que sa surface totale soit égale à celle d'un cercle de rayon a. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 410.)

411. Étant donné le rayon d'une sphère, calculer la hauteur AC d'une zone DAE, de telle sorte que la surface de cette zone soit égale à la surface latérale du cône DBE, qui a même base que la zone et dont le sommet B est situé à l'extrémité du diamètre AB perpendiculaire au plan de la base. (Sorbonne, 1874.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 411.)

412. On donne une sphère de rayon R et un diamètre AOB de cette sphère. On mène un plan DCE perpendiculaire à AB qui coupe cette droite au point C. Déterminer la distance AC de telle sorte que le rapport du segment DAE de la sphère au secteur sphérique DOE soit égal à un nombre donné m. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 412.)

PROBLÈMES DIVERS.

413. Étant donné le rayon d'un cercle, à quelle distance AC faut-il mener une corde DE, perpendiculaire au diamètre AB, de manière que, si l'on fait tourner la figure autour du diamètre AB, le volume engendré par le segment de cercle AMD soit la moitié du volume engendré par le triangle BCD? (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 413.)

414. Étant donné le rayon R d'un cercle, déterminer sur le diamètre AB la distance AC, de telle sorte que, si au point C on élève CD perpendiculaire à AB, et si l'on fait ensuite tourner la figure autour de AB, le rapport des volumes décrits par les deux segments AMD et DNB soit égal à $\frac{1}{4}$. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 414.)

415. On inscrit un demi-hexagone régulier ACDB dans un demi-cercle AB et l'on fait ensuite tourner la figure autour du diamètre AB : calculer le rapport des volumes décrits par les deux segments de cercle AMC et CND. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 415.)

416. La corde CD est parallèle au diamètre AB du demi-cercle AIB et égale au rayon OA du cercle ; on joint le point A au point D, et l'on fait tourner la figure autour de la droite OI perpendiculaire à AB : calculer le rapport des volumes des cônes décrits par les deux triangles rectangles AOH et DEH. (Sorbonne, 1875.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 416.)

TABLE DES MATIÈRES

QUESTIONS.

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Pages.

Problèmes sur les lignes droites et les angles. 1

CHAPITRE II.

Problèmes sur les triangles.

Démonstrations de propriétés ou constructions géométriques..... 4
Constructions de triangles d'après des conditions données.... 7
Problèmes numériques..... 10

CHAPITRE III.

Problèmes sur les quadrilatères.

Démonstrations de propriétés ou constructions géométriques..... 14
Constructions de quadrilatères d'après des conditions données..... 16
Problèmes numériques sur les quadrilatères..... 16

CHAPITRE IV.

Problèmes sur la circonférence et le cercle.

Constructions de propriétés ou constructions géométriques..... 20
Constructions de circonférences d'après des conditions données..... 23
Problèmes numériques..... 24

CHAPITRE V.

Pages.

Problèmes sur les polygones réguliers. 29

CHAPITRE VI.

Lieux géométriques sur les quatre premiers Livres. 32

CHAPITRE VII.

Problèmes sur le cinquième Livre.

Droites et plans..... 36
Théorèmes donnés en composition..... 37

CHAPITRE VIII.

Problèmes sur le sixième Livre.

Polyèdres..... 40

CHAPITRE IX.

Problème sur le septième Livre. 44

CHAPITRE X.

Problèmes sur le huitième Livre.

Problèmes sur le cylindre et le cône..... 45
Problèmes sur les volumes et les surfaces de révolution..... 51
Problèmes sur la sphère..... 59
Problèmes divers..... 65

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 1879-76.

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-76.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉES A LA SORBONNE DE 1853 A 1875

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE, DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1846 A 1875,

ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

SOLUTIONS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1876

(Tous droits réservés.)

RECUEIL

DE PROBLÈMES

SOLUTIONS (*)

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES DROITES ET LES ANGLES.

1. D'un point P quelconque, pris sur AB, on décrira, avec la longueur donnée pour rayon, un arc de cercle coupant en Q la droite CD; il suffira ensuite de mener par le point O une parallèle à PQ; en effet, MN sera égale à PQ comme parallèles comprises entre parallèles.

Comme l'arc de cercle coupe CD en un second point Q', le problème admet deux solutions (OM, OM'). Si l'arc de cercle est tangent, il n'y en a qu'une; s'il ne coupe pas CD, le problème est impossible. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 1.)

2. Menons la bissectrice SI de l'angle, et du point O abaissons une perpendiculaire sur cette ligne; il est clair que les triangles S*ia*, S*ib* seront égaux; donc S*a* = S*b*. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 2.)

(*) Les lettres (S.), placées à droite, sont destinées à appeler l'attention du lecteur sur les lignes renfermant les *solutions* des problèmes.

3. Il suffit pour cela de voir si

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Si cela a lieu, les droites AA′, BB′, CC′ concourent au même point; or

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5} = \frac{1,24}{3,10} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 3.)

4. Abaissons, des points A et B, des perpendiculaires sur les côtés de l'angle, et prolongeons-les de quantités égales à elles-mêmes, de façon à obtenir A′ et B′; joignons A′B′, qui coupe les côtés de l'angle en M et N. AMNB sera le plus court chemin cherché, car AMNB = A′B′, plus court chemin de A′ en B′. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 4.)

5. Soit I le point de rencontre des droites données; menons OC parallèle à AB, prenons Cn = IC, joignons nOm, qui sera la ligne cherchée; car, dans le triangle mIn, on a $\frac{nO}{mO} = \frac{Cn}{CI}$, et par construction IC = Cn.

Si les droites étaient parallèles, le problème serait impossible, sauf dans le cas où O serait également distant des deux droites, et alors toute droite menée par O satisferait à l'énoncé. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 5.)

6. Soit CX la ligne demandée, on veut que Aa + Bb = m. Joignons AB par le milieu D de cette droite, abaissons DR perpendiculaire à CX; le point R sera le milieu de ab, et CR sera égal à $\frac{1}{2}$(Aa + Bb).

Il suffira donc, pour résoudre le problème, de décrire du point D comme centre, avec $\frac{1}{2}$ m pour rayon, une circonférence: la tangente menée à ce cercle, par le point C, sera la ligne demandée.

Le problème aura généralement deux solutions, si C est hors de la circonférence; une seule, si C est sur la circonférence même; pas, si C est intérieur. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 6.)

7. Soit CX la ligne demandée; on veut que Bb + Aa = m. Menons, par le point A, AD parallèle à CX, BD sera égal à m.

Il suffit donc de mener du point B, comme centre, une circonférence ayant m pour rayon, et de mener de A une tangente à ce cercle ; la ligne cherchée sera la parallèle à cette tangente menée par le point C.

La position de A par rapport à la circonférence montre dans quels cas le problème a deux solutions, une seule ou aucune. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 7.)

8. Posons $AD = a$, nous aurons dans ADE

$$\frac{DE}{\sin A} = \frac{a}{\sin AEB} = \frac{a}{\sin(A+x)},$$

d'où

$$DE = \frac{a \sin A}{\sin(A+x)}.$$

Pour que DE soit minimum, il faut que $\sin(A+x)$ soit maximum :

$$(\sin A + x) = 1;$$

c'est-à-dire que

$$A + x = 90^\circ,$$
$$x = 90^\circ - A.$$

Le minimum a donc lieu quand DE est perpendiculaire à AB. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 8.)

9. Soient A, B, C les points donnés, CX la droite cherchée ; on veut avoir

$$Aa \times Bb = K^2.$$

Posons $AB = 2m$; soit I le milieu de AB ; menons par ce point une parallèle à CX, nous aurons

$$Aa = aK + AK,$$
$$Bb = Hb - Hb;$$

mais

$$AK = HB,\ aK = Hb.$$

$$Aa.Bb = \overline{Ka}^2 - \overline{AK}^2 = K^2.$$

Si nous joignons a I, les triangles rectangles a KI, AKI donnent

$$\overline{Ka}^2 = \overline{aI}^2 - \overline{IK}^2,$$
$$\overline{AK}^2 = \overline{AI}^2 - \overline{IK}^2 = m^2 - \overline{IK}^2,$$
$$\overline{Ka}^2 - \overline{AK}^2 = K^2 = \overline{aI}^2 - m^2,$$

ce qui permet de construire la longueur

$$aI = \sqrt{K^2 + m^2}.$$

Soit maintenant A′ le symétrique de A par rapport à CX ; si nous joignons CA′, BA′, nous aurons

$$CA' = CA \quad \text{et} \quad BA' = 2aI,$$

car I, a joignent les milieux des côtés dans le triangle AA′c. On peut donc déterminer le point A′ par l'intersection de deux circonférences. Le point A′ déterminé, on abaissera une perpendiculaire sur AA′.

On voit que, suivant que les circonférences qui déterminent A′ seront sécantes, tangentes ou intérieures, il y aura deux solutions, une seule ou aucune. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 9.)

10. On veut que

$$MB \times MC = a^2$$

Joignons MA. Sur cette droite décrivons une demi-circonférence ; à partir de M inscrivons

$$MD = a,$$

et abaissons DH perpendiculaire à MA ; nous aurons

$$MD^2 = a^2 = MH \times MA,$$

par conséquent

$$MH \times MA = MB \times MC;$$

c'est-à-dire que le quadrilatère AHBC est inscriptible. Les triangles AMB, MHC sont semblables, car ils ont l'angle M commun, et les angles en A et en C ont même nature.

Il suffira donc, pour avoir le point C, de décrire sur HA un segment capable de l'angle connu MAB et de prendre son intersection avec AC ; la droite MC sera la droite cherchée.

En général, il y aura deux solutions, car on pourra diviser MA de deux façons, pour avoir

$$MA \times MH = a^2.$$

Il n'y en aura qu'une quand H sera au milieu de MA ; il n'y en aura pas quand cette division sera impossible. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 10.)

11. Les trois nombres réduits au même dénominateur donnent

$$\frac{16}{24},\ \frac{120}{24},\ \frac{21}{24}.$$

Il suffira donc de partager cette droite en parties proportionnelles à des longueurs de 16^m, 120^m et 21^m.

12. Menons la bissectrice des angles formés par les droites. Il y aura deux cas à considérer : le point O sera situé en dehors des bissectrices ou sur l'une des bissectrices. Dans le premier cas, on aura deux solutions en abaissant des perpendiculaires du point O sur chacune des bissectrices. Dans le second cas, on n'aura qu'une solution, qui sera la perpendiculaire à la bissectrice contenant le point O. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 12.)

13. *Première méthode.* — Faisons choix d'une unité de longueur quelconque mn; menons une ligne AE faisant avec AB un angle quelconque; portons sur AE des longueurs AC, CD, DE égales à $2mn$, $\frac{3}{4}mn$ et $\frac{1}{2}mn$; puis, par les points C, D, menons des parallèles à EB. Les segments AL, LK, KB répondront à la question.

Deuxième méthode. — Les trois nombres donnés, réduits au même dénominateur, valent

$$\frac{8}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4}.$$

Divisons AB en $8+3+2$ ou 13 parties égales, et prenons successivement 8, 3, 2 de ces parties, nous aurons encore les segments demandés, car des fractions qui ont même dénominateur ont entre elles les mêmes rapports que leurs numérateurs. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 13.)

14. Proposons-nous de construire $x = \sqrt{mn}$.

Premier procédé. — Soient m, n les deux lignes données; sur une droite indéfinie, on porte à la suite l'une de l'autre les deux longueurs données $AB = m$, $BC = n$; sur la somme AC comme diamètre, on décrit une circonférence. Au point B, on élève une perpendiculaire BE, et cette droite est la moyenne demandée. On justifie la construction en observant que BE est une ordonnée au diamètre, et que l'on a $(BE)^2 = AB \times BC$.

Deuxième procédé. — Sur une droite indéfinie, on porte la plus grande des deux longueurs données $AB = m$; sur cette droite, de B vers A, on prend $BD = n$; sur la première AB, comme diamètre, on décrit une circonférence; au point D on élève une perpendiculaire DF, on joint FB, et cette corde est la moyenne demandée. On justifie la construction en observant que l'on a

$$(BF)^2 = AB \times BD.$$

Troisième procédé. — Prenons $AB = m$, $BD = n$; sur la différence AD de ces deux longueurs, on décrit une demi-circonférence, ou, par les points A et D, on fait passer un arc quelconque, et par le point B on mène la tangente BG à cet arc. En effet,

$$(BG)^2 = AB \times BD.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 14.)

15.

$$AB = 0^m,25,$$
$$AC = 0^m,13,$$
$$BD = 0^m,07,$$
$$AO = x,$$
$$BO = 0^m,25 - x,$$

$$AC = AO \operatorname{tang}\alpha, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{AC}{AO},$$

$$BD = BO \operatorname{tang}\alpha, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{BD}{BO},$$

d'où

$$\frac{AC}{AO} = \frac{BD}{BO},$$

ou

$$\frac{0^m,13}{x} = \frac{0^m,07}{0^m,25 - x},$$

d'où l'on tire

$$AO = 0^m,1625, \quad (S.)$$
$$BO = 0^m,0875. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 15.)

CHAPITRE II.

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES.

1° DÉMONSTRATIONS DE PROPRIÉTÉS OU CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

16. Soit O′ le point de rencontre de Aa et Bb. Soit O le point de rencontre de Bb et Cc.

Nous aurons d'une part

$$\frac{AB}{ab} = \frac{O'B}{O'b},$$

d'autre part

$$\frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob},$$

et parce que

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc};$$

il suit

$$\frac{OB}{Ob} = \frac{O'B}{O'b},$$

où

$$\frac{OB - Ob}{Ob} = \frac{O'B - O'b}{O'b};$$

mais

$$OB - Ob = Bb = OB - O'b;$$

donc

$$Ob = O'b,$$

c'est-à-dire que les points O et O′ se confondent; ce qu'il fallait démontrer. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 16.)

17. Soit O le point de rencontre des lignes NO, PO. Le point O, comme appartenant à NO, sera à égale distance de A et C, comme appartenant à PO, à égale distance de A et B; donc O est à la même distance de C et B; donc il est sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC; ce qu'il faut démontrer. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 17.)

18. Soit I le point de rencontre des bissectrices des angles B et C. Le point I, appartenant à la bissectrice de l'angle C, est à égale distance des côtés BC et CA. Le point I, appartenant à la bissectrice de l'angle B, est à égale distance de BC et BA. Donc I est à égale distance des côtés BA et CA, c'est-à-dire qu'il appartient à la bissectrice de l'angle A; ce qu'il faut démontrer. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 18.)

19. Je mène par les différents sommets des parallèles aux côtés opposés, et je détermine ainsi le triangle A'B'C'.

Les figures C'BCA, ABCB' sont des parallélogrammes; donc

$$C'A = BC = AB'.$$

Donc A est le milieu de C'B'. On verrait de même que les points C et B sont les milieux de A'B' et A'C'; donc les hauteurs de ABC sont les perpendiculaires élevées au milieu des côtés de A'B'C', et l'on sait que de telles droites se coupent au même point. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 19.)

20. Considérons les médianes MA, NB, qui se coupent en I, joignons MN : cette ligne sera parallèle à AB; donc les triangles ABI, IMN sont semblables, et

$$\frac{MN}{AB} = \frac{IN}{IB} = \frac{IM}{IA};$$

mais

$$MN = \frac{1}{2} AB:$$

donc

$$IN = \frac{1}{2} IB,$$

$$IM = \frac{1}{2} AI;$$

c'est-à-dire que deux médianes se coupent en un point situé au tiers de leur longueur à partir de la base; la troisième médiane passe donc par le même point. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 20.)

21. Par le point E, menons EF parallèle à AM; si l'on considère le triangle BEF, la droite IM menée par le milieu de BE parallèlement à EF divise BF en deux parties égales : donc

$$BM = MP;$$

par la même raison, dans AMC, EF divise MC en deux parties égales : donc

$$MF = FC,$$

c'est-à-dire que

$$BM = \frac{1}{3}BC.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 21.)

22. Le point I est également distant de BN et AB, puisqu'il est sur la bissectrice de ABN; de même I est à égale distance de AM et AB : donc il est également distant de CA et CB; mais le centre O du cercle inscrit au triangle est aussi également distant de CA et CB : donc OI est la bissectrice de l'angle C et passe par ce point. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 22.)

23. Soient le triangle ABC et ses trois hauteurs AD, BE, CF; je vais prouver que CF est la bissectrice de l'angle DFE; on prouverait de même que BE et AD sont les bissectrices de FED et FDE.

En effet le quadrilatère BFEC est inscriptible, puisque les angles en F et E sont droits; donc BFE est le supplément de C; mais BFE est aussi le supplément de AFE : donc

$$AFE = C.$$

On verrait de même que

$$BFD = C.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 23.)

24. Conservons les notations du problème précédent; soit de plus H le milieu d'un des côtés; je vais prouver que le quadrilatère FEHD est inscriptible.

Le cercle décrit sur AC comme diamètre passe par les points

F et D, puisque les angles AFC, ADC sont droits; mais H est le centre de ce cercle : donc HD est un rayon et HD = HC. Le triangle DHC étant isoscèle, les angles HDC, HCD sont égaux. L'angle EHD extérieur au triangle HDC vaut donc 2HCD. Mais EFD vaut $2dr - 2c$; donc EFD est le supplément de EHD, et le quadrilatère EFDH est inscriptible. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 24.)

25. Soit AD la bissectrice de l'angle A, il faut prouver que

$$AB \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

Menons le cercle circonscrit au triangle. Prolongeons AD jusqu'à sa rencontre en E, joignons EC. Les triangles BAD, EAC, semblables, donnent

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC},$$

$$AB \times AC = AE \times AD = (AD + DE)\,AD = \overline{AD}^2 + ED \times DA.$$

Or, d'après un théorème connu

$$BD \times DC = AD \times DE;$$

on a donc

$$AB \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 25.)

26. Soit AD la hauteur du triangle BAC, O le centre du cercle circonscrit, il faut prouver que

$$AB \times AC = AD \times LC.$$

Joignons AL; les triangles ABD, ALC sont semblables, car ils ont les angles BDA et LAC droits, et les angles ABD, ALC égaux comme ayant même mesure; on en tire

$$\frac{LC}{AB} = \frac{AC}{AD},$$

ou

$$AB \times AC = AD \times LC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 26.)

26 *bis.* Soit le triangle ABC, et MD, ME les perpendiculaires menées du point M aux deux côtés égaux; je dis que

$$MD + ME = \text{const.};$$

abaissons CG perpendiculaire à AB, menons par le point M une ligne MI parallèle à AB : les droites MD et GI sont égales (parallèles comprises entre parallèles); mais les triangles MIC, CEM sont égaux, car ils sont rectangles, ont l'hypoténuse commune, et $\widehat{IMC} = \widehat{ECM}$, puisque $\widehat{IMC}$ est égal à B. Donc

$$MD + ME = CG$$

droite constante. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 26 *bis.*)

27. Dans le triangle équilatéral ABC menons MD, ME, MF perpendiculaires aux trois côtés; menons une constante CG perpendiculaire à AB; menons KH parallèle à AB; menons KL perpendiculaire à BC. Nous avons

$$(1) \qquad MD = GI$$

et

$$(2) \qquad ME + MF = KL,$$

d'après le problème 26 *bis*; mais KL = CI, le triangle CKH étant équilatéral. Ajoutant (1) et (2) et substituant CI à KL, nous avons

$$MD + ME + MF = GI + CI = \text{const. } CG. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 27.)

28. Puisque A et D sont supplémentaires, si j'applique DF sur AB, le point D en A, le côté DE s'appliquera sur le prolongement de AC.

Soit donc AEF le triangle DEF ainsi transporté. Joignons BE.

Les triangles ABC, AEB, ayant même hauteur,

$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{CA}{AE},$$

ou

$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{DE}.$$

Les triangles BAE, FAE, ayant aussi même hauteur,

$$\frac{BAE}{FAE} = \frac{BA}{FA},$$

ou

$$\frac{BAE}{DEF} = \frac{BA}{FD}.$$

Multiplions les deux égalités,

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB \times AC}{DE \times DF}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 28.)

29. Soient le triangle ABC, O, O′ les centres du cercle inscrit et de l'un des cercles exinscrits (on sait qu'on appelle ainsi les cercles tangents à l'un des côtés et aux prolongements des deux autres). Soient a, b, c les côtés et S la surface, qu'on sait exprimer en fonction des côtés, r et r_1 les rayons des cercles considérés.

$$ABC = OAB + OBC + OAC;$$

mais chacun des petits triangles a pour base l'un des côtés, pour hauteur r_1; donc

$$S = \frac{1}{2} r (a + b + c).$$

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Le triangle ABC peut être considéré comme la différence entre (O′BA + O′CA) et O′BC.

Ces triangles ont pour hauteur r' et pour bases a, b, c; on a donc

$$S = \frac{1}{2} Cr_1 + \frac{1}{2} br_1 - \frac{1}{2} ar_1,$$

$$r_1 = \frac{2S}{c + b - a}.$$

On trouverait de même, en appelant r_2 et r_3 les rayons des deux autres cercles,

$$r_2 = \frac{2S}{a + b - c}.$$

$$r_3 = \frac{2S}{a + b - c}.$$

On peut remarquer que

$$r r_1 r_2 r_3 = S^2.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 29.)

30. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC; m, n, q les longueurs des perpendiculaires OD, OE, OF abaissées sur les côtés a, b, c; r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle.

Joignons OA, OB, OC : ces lignes sont égales à R. Je joins encore DE, DF, FE; on aura

$$DE = \frac{1}{2}c,$$

$$DF = \frac{1}{2}b,$$

$$EF = \frac{1}{2}a.$$

Cela posé, dans les quadrilatères inscriptibles

OECD, OEAF, OFBD,

le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés ; on aura donc

$$\frac{1}{2}bR = \frac{1}{2}cm + \frac{1}{2}aq,$$

ou

$$bR = cm + aq,$$
$$cR = am + bm,$$
$$aR = bq + nc.$$

On a de plus

$$2S = ma + nb + qc.$$

Ajoutons ces quatre égalités, et appelons $2p$ le périmètre du triangle donné; nous aurons

$$2pR + 2S = 2pm + 2pn + 2pq,$$

$$R + \frac{S}{p} = m + n + q,$$

Or

$$\frac{S}{p} = r;$$

donc

$$R + r = m + n + q.$$ C. Q. F. D.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 30.)

31. Soit le triangle ABC. L'angle B, étant droit, est inscriptible dans une demi-circonférence ; donc AC est un diamètre du cercle circonscrit.

Soit maintenant O le centre du cercle inscrit ; appelons r le rayon de ce cercle : nous aurons

$$(1) \qquad r = OQ = RB = AB - AR = c - AR,$$

$$(2) \qquad r = OR = BQ = BC - QC = b - QC.$$

Mais

$$AR = AP, \quad CQ = CP;$$

donc, faisant la somme de (1) et (2),

$$2r = c + b - a.$$

32. Soient le triangle ABC, la perpendiculaire AI, O, O′ les centres des cercles inscrits dans les triangles partiels, P, P′ les points de contact de ces cercles.

On sait que

$$\frac{BI}{IC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Mais les triangles semblables AOB, AO′C donnent

$$\frac{AB}{AC} = \frac{OP}{O'P'};$$

donc

$$\frac{\pi\overline{OP}^2}{\pi\overline{O'P'}^2} = \frac{BI}{IC}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 32.)

33. Soient le triangle ABC rectangle en A′, O le cercle inscrit, I, H, K les points de contact, et R le rayon de ce cercle.

La figure AKOH est un carré qui a R pour côté. Or la surface du triangle est égale, d'une part, à

$$\frac{1}{2} AB \times AC;$$

de l'autre, en la considérant comme somme des triangles AOB AOC, BOC, sa surface est

$$\frac{1}{2} R(AB + AC + BC).$$

Ainsi

$$AB \times AC = R\,(AB + AC + BC);$$

mais

$$AB = BI + R,$$
$$AC = CI + R,$$

et

$$BC = AB + BC - 2R;$$

l'égalité devient alors

$$(BI + R)\,(CI + R) = R\,(2BC + 2R),$$
$$BI\,.\,CI = R \times BC + R^2.$$

Or le deuxième membre représente la surface du triangle ; on a donc

$$BI\,.\,CI = S.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 33.)

34. Appelons a, b, c les trois côtés, nous aurons

(1) $$a + b + c = P,$$

(2) $$bc = 2S,$$

(3) $$a^2 = b^2 + c^2.$$

Multiplions l'équation (2) par 2 et ajoutons à (3) ensuite, nous aurons

$$(b + c)^2 = a^2 + 4S,$$
$$(P - a)^2 = a^2 + 4S,$$

d'où l'on tire

$$a = P^2 - \frac{4S}{2P}.$$

Comme a doit être positif, on voit d'abord qu'il faut que

$$P^2 > 4S.$$

Nous connaissons

$$bc = 2S \quad \text{et} \quad b + c = P - a = \frac{P^2 + 4S}{2P};$$

il faut que les valeurs de b et c soient réelles, c'est-à-dire que

$$b = \frac{P^2 + 4S + \sqrt{(P^2 + 4S)^2 - 32SP^2}}{4P},$$

$$c = \frac{P^2 + 4S - \sqrt{(P^2 + 4S)^2 - 32SP^2}}{4P}.$$

Deuxième condition : $(P^2 + 4S)^2 - 32SP^2 > 0.$

35. Soit M le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC; menons MP perpendiculaire sur AB et joignons MA. Le point P sera le milieu de AB à cause du parallélisme des lignes MP et AC. Par suite, MA = MB comme obliques également éloignées du pied de la perpendiculaire MP. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 35.)

36. Généralisons l'énoncé : Si deux polygones semblables ont leurs côtés parallèles, les droites qui joignent les sommets homologues se croisent en un même point : ce point est le centre de similitude des deux polygones.

Soient les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', qui remplissent les conditions de l'énoncé. Joignons AA' et BB'; soit S le point de rencontre de ces deux droites; les deux triangles SAB, SA'B' seront semblables comme équiangles, puisque AB et A'B' sont parallèles, et l'on aura

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Joignons SC et SC' et comparons les triangles BSC, BSC'. L'angle en B sera égal à l'angle en B', à cause des parallèles BC, B'C'. On aura d'ailleurs

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BS}{B'S}.$$

Par suite de la similitude des polygones, on aura aussi

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BS}{B'S'},$$

et les deux triangles BSC, B'SC' seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ils seront donc équiangles, et les rayons SC et SC' ne formeront qu'une seule et même ligne droite. On prouverait de même que DD' et EE' passent par le point S. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 36.)

37. Appelons x, y, z les trois côtés du triangle; nous aurons

$$\frac{x}{ab} = \frac{\frac{y}{a^2 - b^2}}{2} = \frac{\frac{z}{a^2 + b^2}}{2} = q.$$

En désignant par q ce rapport constant, on en déduit

$$x = abq, \qquad x^2 = a^2b^2q^2,$$

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2}q, \qquad y^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 q^2,$$

$$z = \frac{a^2 + b^2}{2}q, \qquad z^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 q^2.$$

Or, il est facile de vérifier l'identité suivante :

$$q^2\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 + a^2b^2\right]q^2,$$

car on a, en effectuant,

$$\frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}{4} = \frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2}{4} + \frac{4a^2b^2}{4}.$$

Donc le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres; je dis qu'il résulte de là que le triangle est rectangle. En effet, soit ABC le triangle donné, dans lequel on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Menons CD perpendiculaire sur AC; prenons CD égal à AB; nous aurons, le triangle ACD étant rectangle,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2,$$

ou bien

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2;$$

donc

$$AD = BC.$$

Par suite, les deux triangles ABC, ADC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Or l'angle ACD est droit : donc l'angle BAC l'est aussi ; ce qu'il fallait démontrer. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 37.)

38. Le triangle ADE sera semblable au triangle ABC. Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues. Si donc je désigne AE par x et AC par b, j'aurai

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{1}{3} = \frac{x^2}{b^2}.$$

Pour construire x, je décris sur AC comme diamètre une circonférence ; je divise AC en trois parties égales, et par le premier point de division je mène KM perpendiculaire sur AC. On aura, d'après un théorème connu, en joignant AM,

$$\frac{AM^2}{AC^2} = \frac{AK}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{AM^2}{b^2} = \frac{1}{3}.$$

Donc $AM = x$, et il suffira de rabattre par un arc de cercle le point M en E, puis de mener la parallèle EF. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 38.)

39. x et y étant les deux côtés cherchés, on a

$$x^2 + y^2 = a^2$$

et

$$xy = ah.$$

On en déduit

$$(x+y)^2 = a^2 + 2ah \quad \text{et} \quad x + y = \sqrt{a^2 + 2ah}$$

et

$$(x-y)^2 = a^2 - 2ah \quad \text{et} \quad x - y = \sqrt{a^2 - 2ah},$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a(a+2h)} + \sqrt{a(a-2h)}\right]$$

et

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a(a+2h)} - \sqrt{a(a-2h)}\right].$$

Pour que le problème soit possible, il faut que les quantités sous les radicaux soient positives. La première l'est toujours, puisque a et h sont des longueurs, et, pour que la seconde le soit, il faut et il suffit que l'on ait

$$a > 2h.$$

Quand $h = \frac{a}{2}$, on a

$$x = y = \frac{1}{2} a \sqrt{2}.$$

Le triangle rectangle est alors isoscèle ; c'est un demi-carré dont la diagonale est a et le côté $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

40. Soit x la distance AM à laquelle on doit mener la parallèle DE et h la hauteur AK.

Les deux triangles ADE, ABC sont semblables, et leurs aires sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues. On a donc

$$\frac{\text{surf. ADE}}{\text{surf. ABC}} = \frac{x^2}{h^2};$$

mais

$$\frac{\text{surf. ADE}}{\text{surf. ABC}} = \frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$x = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2},$$

c'est-à-dire que AM est la demi-diagonale du carré construit, la hauteur AK. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 40.)

41. Soit $a > b$, $OM = x$, $LR = y$; on a

$$\text{surf. CDEK} = \frac{a+b}{2} \times h,$$

$$\text{surf. LERK} = \frac{a+y}{2} \times x,$$

et par suite, d'après l'énoncé,

$$(1) \qquad (a+y)x = \frac{a+b}{2} \times h.$$

Mais les triangles semblables DNR, DGK, que l'on obtient en menant DG parallèle à CE, donnent

$$\frac{DO}{DM} = \frac{NR}{GK}, \quad \text{ou} \quad \frac{h-x}{h} = \frac{y-b}{a-b},$$

d'où

$$y = \frac{ab-(a-b)x}{h};$$

reportant cette valeur de y dans l'équation (1),

$$\left[a + \frac{ah-(a-h)x}{h}\right]x = \frac{(a+b)h}{2},$$

et, après réduction au même dénominateur h et suppression de ce dénominateur,

$$4ahx - 2(a-b)x^2 = (a+b)h^2,$$

d'où

$$2(a-b)x^2 - 4ahx + (a+b)h^2 = 0.$$

On voit, à l'inspection de l'équation, que la somme des racines est positive ainsi que leur produit; elles sont donc toutes deux positives; mais on rejettera la valeur de x supérieure à h comme ne convenant pas à la question.

Résolvant, il vient

$$x = \frac{4ah \pm \sqrt{16a^2h^2 - 4 \times 2(a-b)(a+b)h^2}}{4(a-b)}.$$

Effectuant et réduisant sous le radical,

$$x = \frac{4ah \pm \sqrt{8a^2h^2 + 8b^2h^2}}{4(a-b)},$$

et, si l'on fait sortir $4h^2$ du radical, il vient, après simplification,

$$x = h \times \left[\frac{2a \pm \sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}\right].$$

Discussion. Pour choisir entre les deux signes placés devant le radical, on remarquera qu'on peut écrire

$$x = h\left[\frac{2a}{2(a-b)} \pm \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{4(a-b)^2}\right];$$

la première fraction $\frac{2a}{2(a-b)}$ étant plus grande que 1, si l'on prenait le signe $+$, il est évident qu'on aurait $x > h$, valeur qui ne convient pas à la question; d'autre part, il faut que le radical précédé du signe $-$ donne, entre crochets, une différence moindre que 1. Or, en résolvant l'inégalité

$$\frac{a}{a-b} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2(a-b)^2} < 1,$$

on trouve $b < a$, condition que nous avons posée au début. Donc

la seule valeur qui convienne est donnée par la valeur

$$x = h\left[\frac{2a - \sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}\right].$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 41.)

42. On a les équations

(1) $$x + y = p,$$

(2) $$x^2 + y^2 = d^2.$$

Élevant au carré l'équation (1), il vient

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2,$$

et, si l'on en retranche l'équation (2),

(3) $$2xy = p^2 - d^2.$$

Soustrayant de l'équation (2), on a

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2d^2 - p^2,$$

d'où

(4) $$(x - y) = \pm\sqrt{2d^2 - p^2}.$$

La somme et la différence des inconnues étant données en (1) et (4), on en déduit, par voie d'addition et de soustraction,

$$x = \frac{p \pm \sqrt{2d^2 - p^2}}{2}, \quad y = \frac{p \mp \sqrt{2d^2 - p^2}}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut : 1° que les racines soient réelles; 2° qu'elles soient toutes deux positives.

1° La première condition est réalisée quand on a $2d^2 \geqslant p^2$. Si $2d^2 = p^2$, le radical s'annule, $x = y$, et la figure devient un carré.

2° Pour que les racines soient toutes deux positives, leur somme l'étant déjà (1), il faut et il suffit que leur produit le soit aussi. Or on a

(3) $$2xy = p^2 - d^2;$$

il faut donc que l'on ait

$$(p + d)(p - d) > 0 \quad \text{ou} \quad p > d.$$

Mais on a déjà trouvé

$$p^2 \leqslant 2d^2 \quad \text{ou} \quad p \leqslant d\sqrt{2}.$$

Donc les conditions de possibilité du problème sont données par les inégalités

$$d\sqrt{2} < p < d.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 42.)

43. $$OC \times OD = OA \times OB.$$

Soit

$$OC = a, \quad OD = b, \quad a - b = 1,84, \quad ab = 2,52;$$

$$b^2 + 1,84\,b - 2,52 = 0, \quad b = -0,92 \pm \sqrt{0,8464 + 2,52}.$$

$$CD = 3^m,6694. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 43.)

2° CONSTRUCTION DES TRIANGLES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

44. Soit M, N, P les pieds des trois hauteurs. Construisons les bissectrices du triangle MNP; soient MA, NB, PC.

En M, N, P élevons des perpendiculaires à ces bissectrices; nous savons que nous aurons le triangle demandé. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 44.)

45. Soient donnés AB, l'angle C et la somme AC + CB. Supposons le problème résolu. Prolongeons BC de CA′ = CA et joignons AA′. Le triangle ACA′ sera isoscèle, A = A′; mais l'angle BCA, étant extérieur au triangle ACA′, vaut A + A′, c'est-à-dire 2A′; donc $A' = \frac{C}{2}$.

Pour résoudre le problème, sur BA on décrira un segment capable de $\frac{C}{2}$, puis on inscrira dans ce segment une corde

$$BA' = BC + CA.$$

On joindra AA′, et en A on fera

$$A'AC = \frac{C}{2}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 45.)

46. Données :

$$AB,\ C,\ AC - CB.$$

Supposons le problème résolu ; prenons

$$CI = CB;$$

joignons IB, et abaissons CK perpendiculaire à IB. Le triangle CIB est isoscèle : donc

$$ICK = \frac{C}{2}.$$

L'angle AIB, extérieur au triangle CIK, est égal à

$$IKC + ICK = 1^{dr} + \frac{C}{2}.$$

D'ailleurs

$$IA = AC - CB.$$

Donc, pour résoudre le problème, on décrira un segment capable de l'angle $1^{dr} + \frac{C}{2}$, on inscrira en AI une corde égale à AC — CB ; on joindra IB, on élèvera au milieu K une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de AI prolongé, ce qui donnera C. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 46.)

47. Données :

$$BC \quad \text{et} \quad BO - OC.$$

Le point O est le point de rencontre des bissectrices des angles B et C.

Dans le triangle BOC on connaît donc la base BC, la différence des deux autres côtés BO — OC, et l'angle opposé à la base, car

$$BOC = 2^{dr} - (OBC + OCB) = 2^{dr} - \frac{1}{2}(B + C)$$

$$= 2^{dr} - \frac{1^{dr}}{2} = BOC = 1^{dr} + \frac{1^{dr}}{2}.$$

On construira donc le triangle BOC. (*Problème* 117.)

Puis, doublant les angles OBC, OCB, on obtiendra le triangle cherché. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 47.)

48. Données :

$$AB,\quad AB + CB,\quad CBA - CAB = D.$$

Supposons le problème résolu; prolongeons AC de CB′ = CB. Le triangle CBB′ est isoscèle; donc

$$CB'B = CBB'.$$

Mais nous avons

$$A + B + C = 2^{dr},$$

$$B - A = D;$$

d'où, par addition,

$$2B + C = 2^{dr} + D,$$

$$B + \frac{C}{2} = 1^{dr} + \frac{D}{2}.$$

Remplaçons $\frac{C}{2}$ par CBB′, qui lui est égal, et nous avons

$$ABB' = 1^{dr} + \frac{D}{2}.$$

On peut donc construire l'angle ABB′ : du point A avec AC + CB pour rayon, on décrira un arc de cercle qui donnera le point B′; il suffira alors de faire

$$CBB' = CB'B,$$

et l'on aura C. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 48.)

49. Données :

$$AH,\ B,\ AB + AC + BC.$$

On fera un angle égal à l'angle B. Parallèlement à BC, et à une distance égale à AH, on mènera une parallèle MN, qui déterminera le point A′.

Si maintenant nous portons BA′ égal au périmètre moins BA, et si nous supposons connu le point C, on voit que ACA′ est isoscèle, donc CI perpendiculaire à AA′ passe au milieu de cette droite. Pour achever le problème, ayant construit BA, il suffira donc de joindre AA′ et d'élever au milieu de AA′ une perpendiculaire; on aura le point C. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 49.)

50. Données :

$$BC,\ AD,\ AB \times AC.$$

Supposons le problème résolu : soit O le centre du cercle circonscrit au triangle, dont j'appellerai d le diamètre. On sait que

$$AB \times AC = d \times AD.$$

On peut donc construire *d*, et par suite le cercle O. On y inscrira une corde égale à BC, puis on mènera à BC une parallèle, à une distance égale à la hauteur donnée, ce qui déterminera A. On voit qu'il y a deux solutions, une seule ou point, selon que cette parallèle coupe le cercle, lui est tangente, ou ne le coupe pas. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 50.)

51. Données :

$$BC, A, OP,$$

rayon de cercle inscrit.

Pour résoudre le problème, faisant un angle égal à A, on inscrira dans cet angle une circonférence ayant OP pour rayon, puis on mènera à cette circonférence une tangente telle que sa partie comprise entre les côtés de l'angle soit égale à BC.

Pour mener une tangente satisfaisant à ces conditions, *voy.* ATLAS, *fig.* 51.

52. Données :

$$BC, AB + AC \quad \text{et} \quad OD,$$

rayon du cercle inscrit.

Supposons le problème résolu : soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit.

Si de $BA + AC$ on retranche BC, il restera évidemment

$$AD + AF,$$

c'est-à-dire

$$2\,AD.$$

On peut donc construire AD.

Pour résoudre le problème, il suffira donc de construire un cercle avec OD pour rayon, de lui mener une tangente égale à DA, puis de A l'autre tangente AF; on revient alors à inscrire dans l'angle DAF une tangente à la circonférence O, de longueur donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 52.)

53. Données :

$$A, B, C, AM.$$

Sur AM on décrira deux segments capables des angles B et C, puis par l'un des points A ou M on mènera aux circonférences capables de B et C une corde commune ayant son milieu en M. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 53.)

54. Données :

AM, AB, AC.

Supposons le problème résolu : soit ABC le triangle. Le lieu des sommets C des triangles ayant AB pour base et AM pour médiane est une circonférence ayant son centre en D, tel que $AD = AB$, et dont le rayon $DC = 2AM$.

Le sommet C doit d'ailleurs se trouver sur un cercle décrit du point A comme centre avec AC pour rayon ; on l'obtiendra donc à l'intersection de ces deux cercles. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 54.)

55. Données :

AD, BE, CF.

On sait que

$$ID = \frac{1}{3} AD,$$

$$IC = \frac{2}{3} CF$$

et

$$IB = \frac{2}{3} BE.$$

Dans un triangle BIC, on connaît donc deux côtés et la médiane comprise ; on peut donc le construire.

Ayant ce triangle, on prolongera BI et CI chacune de la moitié de leur longueur, et l'on joindra B et C aux points correspondants, ce qui déterminera A. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 55.)

56. Soient AB donné, $AC + BC$, et de plus la ligne MN sur laquelle doit se trouver le sommet.

De B abaissons une perpendiculaire BI à MN et prolongeons-la. De A comme centre avec $AC + CB$, décrivons un cercle qui coupe BB′ en B′. Joignons AB′ qui coupe MN en C, ABC sera le triangle cherché, car $CB' = CB$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 56.)

57. Soient x, $x + 1$, $x - 1$ les trois côtés demandés ; nous aurons

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2,$$
$$x^2 = 4x,$$
$$x = 4.$$

Les trois côtés sont donc 3, 4, 5. (S.)

58. Soient $(x-25)$, x et $(x+25)$ les trois côtés; nous aurons

$$(x+25)^2 = x^2 + (x-25)^2,$$
$$x = 100.$$

Les trois côtés sont donc 75, 100 et 125. (S.)

59. La surface du triangle est égale à la moitié de son périmètre multipliée par le rayon du cercle inscrit; elle est aussi égale à la moitié du produit de l'angle droit; on a donc

$$R\ (1+2+\sqrt{5}) = 2,$$

$$R = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0^m,382. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 59.)

60. Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse; nous aurons les trois équations

$$(1) \qquad x+y+z = 132,$$
$$(2) \qquad x^2+y^2+z^2 = 6050,$$
$$(3) \qquad x^2+y^2 = z^2.$$

Combinant (2) et (3), on trouve

$$z^2 = 3025,$$

d'où

$$z = 55.$$

Substituant dans (1) et (3),

$$(4) \qquad x+y = 77,$$
$$(5) \qquad x^2+y^2 = 3025.$$

Elevant (4) au carré et en retranchant (5), on a

$$xy = 1452,$$

d'où l'on conclut que x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - 77X + 1452 = 0,$$
$$x = 33, \ (S.)$$
$$y = 44. \ (S.)$$

61. On aura

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\overline{AB}^2 = BC \times x, \quad x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (S.)$$

$$AC^2 = BC \times y, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (S.)$$

$$AH^2 = x \times y, \quad AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 61.)

62. Proposons-nous d'abord de déterminer l'un des côtés du triangle à construire. Soient a ce côté et A son homologue dans le triangle ABC. Nous avons

$$\frac{a^2}{A^2} = \frac{\text{tr. inconnu}}{\text{tr. ABC}} = \frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a^2}{A^2} = \frac{m}{n}.$$

Pour construire a, je prends sur la ligne indéfinie AB une longueur $AC = m$ et une longueur $CB = n$. Sur AB comme diamètre je décris une demi-circonférence, et au point C j'élève sur le diamètre la perpendiculaire CD. Du point D je mène les cordes DB et DA ; sur la première, je prends $DE = A$, et par le point E je mène EF parallèle à BA. Je dis que DF sera le côté cherché.

En effet, à cause des parallèles BA, EF, on a

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DA}{DB},$$

et par suite

$$\frac{\overline{DF}^2}{\overline{DE}^2} = \frac{\overline{DA}^2}{\overline{DB}^2}.$$

Mais, dans le triangle rectangle ADB, on a aussi

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DB}^2} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

donc

$$\frac{\overline{DF}^2}{\overline{DE}^2} = \frac{m}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{DF}^2}{A^2} = \frac{m}{n}.$$

DF est donc le côté du triangle cherché homologue au côté A du triangle ABC. La question revient alors à ce problème résolu dans le cours : Sur une longueur donnée, construire un triangle semblable à un triangle donné. Nous ne nous y arrêterons pas. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 62.)

63. Soit D le point cherché; par hypothèse, la ligne DB est bissectrice de l'angle D, et l'on doit avoir

$$(1) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{DC} = \frac{b}{c}.$$

D'ailleurs le triangle ADC, rectangle en A, donne

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2,$$

ou

$$(2) \qquad \overline{DC}^2 = x^2 + (b+c)^2.$$

En élevant l'équation (1) au carré, il vient

$$\frac{x^2}{\overline{DC}^2} = \frac{b^2}{c^2};$$

remplaçant $\overline{DC}^2$ par sa valeur tirée de (2), on a

$$\frac{x^2}{x^2 + (b+c)^2} = \frac{b^2}{c^2}.$$

On en déduit

$$c^2 x^2 = b^2 x^2 + b^2 (b+c)^2,$$

ou

$$x^2 (c^2 - b^2) = b^2 (b+c)^2,$$

d'où

$$x = \pm \frac{b(b+c)}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On voit qu'il y a de chaque côté du pied A de la colonne deux points définis par la formule précédente, et tels que de ces deux points la colonne et le mât sont vus sous le même angle.

De plus, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $c > b$, c'est-à-dire que la hauteur du mât soit supérieure à celle de la colonne. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 63.)

64. Désignons par x la bissectrice de l'angle A et par m, n les segments CD, DB.

Solution géométrique. En vertu d'un théorème du 3e livre de *Géométrie* (proposition XXXV, Blanchet), on a

(1) $$bc = mn + x^2;$$

mais

$$m + n = a, \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{c},$$

d'où, par la composition des rapports,

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{b+c}, \quad \frac{n}{a} = \frac{c}{b+c};$$

substituant dans (1), il vient

$$bc = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} + x^2;$$

on tire de là

$$x^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2},$$

et, en désignant par $2p$ le périmètre du triangle,

$$x^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

d'où enfin

$$x = \frac{2\sqrt{pbc(p-a)}}{b+c}. \text{ (S.)}$$

On a de même, pour les bissectrices y et z des angles B et C,

$$y = \frac{2\sqrt{pac(p-b)}}{a+c}, \text{ (S.)} \quad z = \frac{2\sqrt{pab(p-c)}}{a+b}. \text{ (S.)}$$

Solution trigonométrique. On a

$$\frac{x}{\sin C} = \frac{m}{\sin\frac{A}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sin B} = \frac{n}{\sin\frac{A}{2}},$$

d'où

$$x^2 = \frac{mn \sin B \sin C}{\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{4mn \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Remplaçant m, n par les valeurs trouvées précédemment et les lignes trigonométriques en fonction des côtés, on obtient, toutes réductions faites, la même formule que plus haut. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 64.)

65. Bien que le problème se trouve résolu dans tous les traités de Géométrie, il peut être utile de faire les remarques suivantes :

On est conduit aux deux équations

$$x - y = d,$$
$$xy = K^2.$$

Si l'on prend $-y$ pour nouvelle inconnue, ces équations deviennent

$$x + (-y) = d,$$
$$x \times (-y) = -K^2.$$

Les quantités x et $-y$ sont donc les racines de l'équation

$$z^2 - dz - K^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + K^2}.$$

Ces racines sont réelles. En outre, par la nature de la question, x et y doivent être positives. On changera donc le signe de la racine z négative, et l'on aura

$$x = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + K^2}, \qquad y = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + K^2}.$$

La construction de ces valeurs se présente tout naturellement. A l'extrémité B de $AB = K$, on élèvera la perpendiculaire $BO = \frac{d}{2}$; alors

$$AO = \sqrt{\frac{d^2}{4} + K^2}.$$

Reste à augmenter AO de $OD = \frac{d}{2}$, pour avoir x, et à diminuer AO de $OC = \frac{d}{2}$, pour avoir y; on est ainsi conduit à décrire

la circonférence CBD. On retrouve donc la construction donnée en Géométrie élémentaire. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 65.)

66. Posons $MN = x$ et $M'N' = y$; on aura

$$(1) \qquad y - x = d,$$

$$(2) \qquad \frac{x+y}{2} \times KL = m^2.$$

Les triangles semblables AMN, AM'N', ABC donnent

$$\frac{AK}{MN} = \frac{AL}{M'N'} = \frac{AD}{BC'},$$

ou bien

$$\frac{AK}{x} = \frac{AL}{y} = \frac{h}{a};$$

d'où l'on tire

$$\frac{AL - AK}{y - x},$$

ou bien

$$\frac{KL}{d} = \frac{h}{a},$$

et enfin

$$KL = \frac{dh}{a}.$$

L'équation (2) devient donc

$$(3) \qquad \frac{x+y}{2} = \frac{am^2}{dh}.$$

On déduit des équations (1) et (3)

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{am^2}{dh} + \frac{d}{2}, \\ x &= \frac{am^2}{dh} - \frac{d}{2}. \end{aligned}\right\} \text{Conditions de possibilité } m^2 < \frac{ah}{2},\ d < a.$$

La construction s'achève alors facilement.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 66.)

67. Les deux triangles ADE et ABC seront semblables et par suite proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues; nous aurons donc

$$\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{ADE}{ABC} = \frac{1}{3}.$$

La construction de AE revient à déterminer un carré qui soit à un carré donné $\overline{AC}^2$ comme 1 est à 3. Pour cela, je décris sur AC comme diamètre une circonférence ; je prends

$$AM = \frac{1}{3} AC.$$

Au point M j'élève une perpendiculaire sur AC ; elle rencontrera la circonférence en K ; si je joins AK et KC, le triangle AKC sera rectangle et donnera

$$\frac{\overline{AK}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}.$$

AK sera donc la longueur cherchée, et il suffira de décrire du point A comme centre, avec un rayon AK, l'arc de cercle KE, puis de mener ED parallèle à BC. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 67.)

3° PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

68. Soit ABC un triangle rectangle, AP la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'hypoténuse. On aura

$$\overline{AB}^2 = BP \times BC = BP\,(BP + PC) = 2{,}88\,(2{,}88 + 5{,}12),$$
$$\overline{AC}^2 = PC \times BC = PC\,(BP + PC) = 5{,}12\,(2{,}88 + 5{,}12),$$
$$AB = 4^m{,}8,\ (S.)$$
$$AC = 6^m{,}4.\ (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 68.)

69. Le triangle étant rectangle, on a

$$\operatorname{tang} B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{BD \times DC}}{BD} = \frac{\sqrt{DC}}{BD},$$
$$B = 49^\circ\,18'\,40'',5,\ (S.)$$
$$(90^\circ - B) = C = 40^\circ\,41'\,19'',5.\ (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 69.)

70. Soient x et y les côtés cherchés, on aura (S surface, a hypoténuse)

$$xy = 2S,$$

ou

$$x^2y^2 = 4S^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

Alors x^2 et y^2 sont les racines de l'équation du deuxième degré

$$X^2 - a^2X + 4S^2 = 0,$$

qui donne

$$x^2 = 1936,$$

$$y^2 = 1089,$$

d'où

$$x = 44^m, \text{ (S.)}$$

$$y = 33^m. \text{ (S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 70.)

71. Soient x et y les côtés du triangle; nous aurons

(1) $$xy = 2 \times 12{,}65 = 25{,}30,$$

(2) $$x^2 - y^2 = 17{,}35.$$

Élevant (1) au carré et y substituant la valeur de x^2 tirée de (2), on a

$$y^4 + 17{,}35\,y^2 - 160{,}0225 = 0,$$

équation bicarrée dont on prendra seulement la racine positive, puisque y doit être réel :

$$y^2 = 6{,}66377,$$

d'où

$$y = 2{,}581427, \quad \text{(S.)}$$

$$x = 4{,}90038. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 71.)

72. Soient x et y les côtés cherchés; on aura

(1) $$x^2 + y^2 = (32{,}526)^2,$$

(2) $$\frac{x}{y} = 2{,}317.$$

Élevant (2) au carré, puis ajoutant l'unité aux deux membres, on obtient

$$y = \frac{32,526}{\sqrt{1+2,317^2}} = 12^m,888,$$

$$x = 2,317\,y = 29^m,863. \text{ (S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 72.)

73. Appelons x le deuxième côté de l'angle droit, y l'hypoténuse; nous aurons

$$\overline{(21)}^2 + x^2 = y^2,$$
$$x + y = 42,$$

d'où nous déduisons

$$x = 15^m,75, \quad \text{(S.)}$$
$$y = 26^m,25. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 73.)

74. Les trois triangles partiels ayant mêmes hauteurs sont entre eux comme leurs bases AM, MN, NB.

Il suffira donc, pour résoudre le problème, de partager AB en trois parties proportionnelles aux nombres 1, 2, 3 (S.), ce qu'on sait faire. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 74.)

75. Si nous supposons le problème résolu, les surfaces des triangles semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues, on a

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{3}{1},$$

d'où

$$AD = \frac{AB}{\sqrt{3}}.$$

Pour construire cette valeur, sur AB décrivons une demi-circonférence.

Au point G, pris au tiers de AB, élevons GF perpendiculaire à cette droite, et rabattons AF en AD.

En effet, dans le triangle rectangle FAB, on a

$$FA^2 = AD^2 = AB \times AG = \tfrac{1}{3}AB^2.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 75)

76. On veut que

$$\frac{\text{surf. ADE}}{\text{surf. DEBC}} = \frac{M}{N},$$

ou

$$\frac{\text{surf. ADE}}{\text{surf. ADE} + \text{surf. DEBC}} = \frac{M}{M+N},$$

ou bien encore

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{M}{M+N}.$$

Les deux triangles ABC, ADE étant semblables, leurs surfaces sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{M}{M+N},$$

ou

$$\frac{\overline{AD}^2}{M} = \frac{\overline{AB}^2}{M+N}.$$

Pour construire AD, élevons au point A une perpendiculaire à AB, et prenons $AN = M + N$.

Joignons BN; en B élevons à BN une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en P de AN prolongée; nous aurons

$$AP = \frac{\overline{AB}^2}{M+N}.$$

Prenons $AM = M$, et sur PM décrivons une demi-circonférence; le point où elle coupera AB sera le point D, car le triangle PDM, rectangle en D, donne

$$\overline{AD}^2 = PA \times AM = PA \times M,$$

$$\overline{AD}^2 = M\frac{\overline{AB}^2}{M+N}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 76.)

77. Il est facile de voir, d'après les données, que l'angle C est aigu; on a donc

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD,$$

$$CD = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC}.$$

Substituant aux lignes leurs valeurs numériques,

$$CD = 443^m,232, \quad (S.)$$
$$BC - CD = DB = 246^m,240. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 77.)

78. Soit M le point cherché. Les triangles MAB, MBC étant équivalents, si MI, MH sont des perpendiculaires abaissées sur les côtés, nous aurons

$$MI \times AB = MH \times BC,$$
$$\frac{MI}{MH} = \frac{BC}{AB}.$$

La ligne BM est donc le lieu des points dont les distances BA et BC sont dans un rapport donné $\frac{BC}{BA}$; de même MC est le lieu des points dont les distances aux côtés aboutissant en C sont dans le rapport $\frac{AC}{BC}$.

Le point M sera l'intersection de ces deux lieux.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 78.)

79. Supposons le problème résolu. Menons MH égale et parallèle à AN. La figure AHMN sera un parallélogramme. Si de plus on joint BH, le triangle BMH sera isoscèle. BH est donc perpendiculaire à la bissectrice de l'angle HMB, ou, ce qui revient au même, à la bissectrice de l'angle RAB.

Par conséquent, pour avoir le point M, on mènera la bissectrice AI de l'angle RAB, on mènera BH perpendiculaire à cette droite. Par le point A on mènera une parallèle à BC, et au point H où cette dernière ligne coupe BI on mènera une parallèle à AC.

Son intersection avec AB déterminera le point M. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 79.)

80. Soient p et p' les points où la hauteur rencontre les parallèles MN et M'N'. Posons

$$Ap = y,$$
$$Ap' = x.$$

Nous trouvons

$$MN = a\frac{y}{h},$$

$$M'N' = a\frac{x}{h}.$$

On a les équations

$$MN - M'N' = d,$$

ou

$$y - x = \frac{h}{a}d,$$

$$\left(\frac{MN + M'N'}{2}\right)(y - x) = m^2,$$

ou

$$y + x = \frac{2m^2}{d},$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{m^2}{d} + \frac{dh}{2a},$$

$$x = \frac{m^2}{d} - \frac{dh}{2a}.$$

Si l'on trouve pour x une valeur négative, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{m^2}{d} < \frac{h}{2a},$$

on l'interprétera en portant la valeur de x au-dessus du point A. On peut donc dire que le problème est toujours possible, pourvu qu'on puisse également porter les distances x et y au-dessous de la base, si elles sont plus grandes que h. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 80.)

81. Soient x et y les segments de la base :

1° Supposons qu'on veuille que la somme des triangles partiels soit à xy dans le rapport K. Nous aurons

$$\frac{ABM + AMC}{BM \times MC} = K,$$

ou bien

$$\frac{1}{xy} = K,$$

$$x + y = 2,$$

d'où l'on tire

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{K}},$$

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{K}}.$$

Pour que les valeurs de x et y soient réelles, il faut que K soit plus grand que l'unité. Pour $K = 1$, cas limite, on a $x = y$ et les deux petits triangles sont équivalents.

2° Supposons que l'on veuille que la différence des triangles partiels soit à xy dans le rapport h.

Nous aurons

$$\frac{AMC - AMB}{BM.\ MC} = h,$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x}{xy} = h,$$

$$x + y = 2;$$

on tire de ces équations

$$x = \frac{1}{h},$$

$$y = 2 - \frac{1}{h}.$$

Ici le problème est toujours possible. (*Voy.* Atlas, *fig.* 81.)

82. Nous aurons l'équation (en appelant h la hauteur)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 647^2 \times h^2 = 853,45 \times 2 \times 4727,5 \times 2,$$

$$h = \frac{4}{647}\sqrt{853,45 \times 4727,5} = 12^m,418.$$

(*Voy.* Atlas, *fig.* 82.)

83. Le rayon du cercle inscrit est

$$OP = BP \tang OBP = \tfrac{1}{2}a \tang \tfrac{1}{2}B.$$

$$OP = 388^m,610.$$

(*Voy.* Atlas, *fig.* 83.)

84. Désignons par p le demi-périmètre du triangle qui est égal à 716, nous aurons

$$AF = AE = p - BC = 206,$$
$$FB = BD = p - AC = 202,$$
$$DC = CE = p - AB = 304.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 84.)

85. Appelons a le côté du triangle, H sa hauteur, R et R′ les rayons des cercles inscrits et circonscrits; nous aurons

$$R = \tfrac{1}{3}H,$$
$$R' = \tfrac{2}{3}H.$$

Or

$$H = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3};$$

on a donc

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 0^m,86602,$$

$$R' = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 1^m,73205.$$

86. La surface du cercle est πR^2, celle du triangle

$$S = \tfrac{1}{2}BC \times AD.$$

Mais

$$BC = R\sqrt{3},$$
$$AD = \tfrac{3}{2}R;$$

donc

$$S = \tfrac{3}{4}R^2\sqrt{3}.$$

Le rapport cherché r est donc

$$r = \frac{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0,41349.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 86.)

87. Soit R le rayon du cercle, sa surface est πR^2; celle du triangle équilatéral inscrit est

$$\tfrac{3}{4}R^2\sqrt{3};$$

la différence

$$R^2\left(\pi - \tfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

représente trois fois la surface du segment cherché : on a donc, en remplaçant R par sa valeur,

$$x = \frac{64}{3}\left(\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right) = 39^{\text{mq}},3077.$$

88. Soit a le côté du triangle. Il faut évaluer $OM = R$ et $ON = R'$. Menons les cercles inscrits et circonscrit au triangle.

$$OK = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

et

$$OI = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Maintenant

$$R' = OM = OA - AM = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}},$$

$$R = ON = OA + AM = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{RR'} = \frac{a\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

On voit donc que $\sqrt{RR'}$ est égal au rayon du cercle inscrit au triangle.

Dans le cas où $a = 2$, on a

$$R = \frac{(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 2,1547, \quad (S.)$$

$$R' = \frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 0,1547. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 88.)

89. En désignant la surface du triangle par S, et par x la hauteur inconnue, on a

$$\frac{a}{x} = S, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2S}{a};$$

or on a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{40968704} = 6400{,}679,$$

d'où

$$x = \frac{12801{,}358}{120} = 106^{m},67. \quad (S.)$$

90. Soient x et y les côtés de l'angle droit, on aura

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$x + y = 1{,}4.$$

Retranchant la première équation du carré de la seconde, il vient

$$2xy = 0{,}96, \quad \text{d'où} \quad xy = 0{,}48.$$

On se trouve donc ramené à calculer deux nombres x et y, connaissant leur somme 1,4 et leur produit 0,48. Ces nombres sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - 1{,}4z + 0{,}48 = 0.$$

Les nombres cherchés sont donc 0,6 et 0,8. (S.)

91. Désignons respectivement AD, BC, EF, HI, IB par a, b, z, x, y.

Soient s, s', s'' les surfaces ADFE, EFBC, BCG, et m, n, p les nombres avec lesquels ces surfaces sont proportionnelles.

Les surfaces semblables sont en raison directe des carrés des dimensions homologues.

On a donc

$$\frac{s''}{b^2} = \frac{s' + s''}{z^2} = \frac{s + s' + s''}{a^2},$$

d'où, par la composition des rapports,

$$\frac{s}{a^2 - z^2} = \frac{s'}{z^2 - b^2};$$

mais, d'après l'énoncé

$$\frac{s}{m} = \frac{s''}{n};$$

de ces deux relations on tire

$$\frac{a^2 - z^2}{m} = \frac{z^2 - b^2}{n}, \quad \text{d'où} \quad z^2 = \frac{a^2 n + b^2 m}{m + n}.$$

D'autre part, dans les triangles BET, BAL, on a

$$\frac{ET}{AL}=\frac{BI}{BH},$$

ou

$$\frac{z-b}{a-b}=\frac{y}{x+y},$$

d'où

$$z=\frac{ay+bx}{x+y}=\frac{ay+bx}{h};$$

remplaçant z par sa valeur, il vient

$$\left(\frac{ay+bx}{h}\right)^2=\frac{a^2n+b^2m}{m+n},$$

d'où

$$ay+bx=h\sqrt{\frac{a^2n+b^2m}{m+n}}.$$

Ainsi

$$ay+bx=h\sqrt{\frac{a^2n+b^2m}{m+n}},$$

$$y+x=h.$$

Résolvant par rapport à x et y, on a

$$x=\frac{h\left(a-\sqrt{\frac{a^2n+b^2m}{m+n}}\right)}{a-b}, \quad \text{(S.)}$$

$$y=\frac{h\left(\sqrt{\frac{a^2n+b^2m}{m+n}}-b\right)}{a-b}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 91.)

92. Soient c et b les deux côtés de l'angle droit, x et y les deux segments déterminés par la bissectrice sur l'hypoténuse. Ces deux segments étant, d'après un théorème connu, proportionnels aux côtés adjacents, on a la relation

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{b}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{x+y}=\frac{c}{c+b},$$

et en élevant au carré

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{c^2}{(b+c)^2}.$$

Or

$$(x+y)^2 = \overline{BC}^2 = b^2 + c^2,$$

donc

$$\frac{x^2}{b^2+c^2} = \frac{c^2}{(b+c)^2},$$

d'où

$$x = \frac{c}{b+c}\sqrt{b^2+c^2};$$

de même

$$y = \frac{b}{b+c}\sqrt{b^2+c^2}.$$

ici

$$b = 4,275, \quad c = 3,128,$$

$$x = \frac{3,128}{7,403} \times \sqrt{4,275^2 + 3,128^2},$$

$$y = \frac{4,275}{7,403} \times \sqrt{4,275^2 + 3,128^2},$$

et, en faisant les calculs indiqués,

$$\begin{cases} x = 2,237, & \text{(S.)} \\ y = 3,059, & \text{(S.)} \end{cases}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* **92.**)

93. En appelant S la surface du triangle et p son demi-périmètre, on a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = a \times \frac{AD}{2},$$

d'où l'on conclut

$$a \times \frac{AD}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

et

$$AD = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans l'exemple proposé, on a

$$\begin{aligned} p &= 333^m,53, \\ p-a &= 18^m,05, \\ p-b &= 125^m,20, \\ p-c &= 190^m,28, \\ a &= 315^m,48. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\log AD = \left\{ \begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ -\log a &= \overline{3}.5010282 \\ +\frac{1}{2}\log p &= 1,2615674 \\ +\frac{1}{2}\log(p-a) &= 0,6282386 \\ +\frac{1}{2}\log(p-b) &= 1,0488021 \\ +\frac{1}{2}\log(p-c) &= 1,1396965 \end{aligned} \right.$$

$$\log AD = 1,8803628$$

$$AD = 75^m,921. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 93.)

94. Soit

$$BD = 2,88 \quad \text{et} \quad DC = 5,12,$$

nous aurons

$$BC = BD + DC = 8^m.$$

Soient x et y les côtés de l'angle droit ; on aura

$$x^2 + y^2 = 64,$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2,88}{5,12},$$

d'où

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{64} = \frac{2,88}{8},$$

d'où

$$x = \sqrt{2,88 \times 8} = 4^m,800. \quad (S.)$$

On aura aussi

$$\frac{y^2}{64} = \frac{5,12}{8},$$

d'où

$$y = \sqrt{5,12 \times 8} = 6^m,410. \quad (S.)$$

95. La longueur de la circonférence est représentée par

$$2\pi R = 2\pi \times 2^m = 4\pi.$$

Cette longueur étant celle d'un arc de 360°, tout le problème revient à résoudre la règle de trois suivante : La longueur 4π correspond à 360°; à combien de degrés x correspondent 3^m?

$$x = \frac{360 \times 3}{4\pi} = \frac{270^\circ}{3,14159},$$

$$x = 85^\circ 56' 37'',47. \quad (S.)$$

96. 1° Surf. trapèze ABCD $= \dfrac{(AB + CD) \times CQ}{2}$,

$$CQ = \sqrt{\overline{CA}^2 - (AP - CO)^2} = 40^m.$$

Surf. du trapèze $= 28$ ares;

2°
$$\frac{SP}{SO} = \frac{AB}{CD},$$

$$\frac{SP - SO}{SP} = \frac{AB - CD}{AB},$$

$$SP = \frac{10}{6} \times 40.$$

Surf. triangle ASB $= 33$ ares 33 centiares,3333. (S.)

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 96.)

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LES QUADRILATÈRES.

1° DÉMONSTRATIONS DE PROPRIÉTÉS OU CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

97. Soit S la surface du carré dont le côté est AB, S′ celle du carré dont le côté est BC. Nous aurons

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{2\overline{AB}^2} = \frac{1}{2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 97.)

98. Soient ABCD le carré, A′B′C′D′ la figure obtenue par la construction indiquée. Tous les triangles rectangles D′AA′, A′BB′, B′CC′, C′DD′ sont égaux entre eux, comme ayant les côtés de l'angle droit égaux ; donc

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A'.$$

De l'égalité des triangles nommés, il résulte que les angles BA′B′ et CB′C′ sont égaux, par suite que les angles BB′A′ et CB′C′ sont supplémentaires; donc l'angle A′B′C′ est droit. Ainsi la figure A′B′C′D′ a ses côtés égaux et ses angles droits ; c'est donc un carré. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 98.)

99. Soit ABCD le trapèze; soient E et G les milieux des côtés parallèles. Supposons que CA et DB ne se coupent pas sur EG ; soient H et H′ les deux points d'intersection.

A cause des triangles semblables, nous aurons les égalités de rapports

$$\frac{AE}{CG} = \frac{EH}{GH},$$

et

$$\frac{EB}{GD} = \frac{EH'}{GH'}.$$

Mais

$$\frac{AE}{CG} = \frac{EB}{GD};$$

donc aussi

$$\frac{EH}{GH} = \frac{EH'}{GH'},$$

ou encore

$$\frac{GH - EH}{EH} = \frac{GH' - EH'}{EH'}.$$

Mais, comme $GH - EH = GE = GH' - EH'$,

$$EH = EH',$$

c'est-à-dire que les points H et H' se confondent. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 99.)

100. Les triangles semblables AFE, DFC donnent

$$\frac{AF}{FC} = \frac{FE}{FD}.$$

D'autre part, les triangles AFD, CFG, aussi semblables, donnent

$$\frac{AF}{FC} = \frac{FD}{FG},$$

ou, à cause du rapport commun $\frac{FE}{FD} = \frac{FD}{FG}$,

$$FD^2 = FE \times FG.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 100.)

101. Soit le quadrilatère ABCD, soient M, N, P, Q les milieux de ses côtés. Tirons DB. Dans le triangle ADB, MN joint les milieux des côtés AB, AD; donc elle est parallèle à BD et en vaut la moitié.

De même, dans CBD, PN est parallèle à DB et en vaut la moi-

tié; donc QM et PN sont égaux et parallèles, donc MNPQ est un parallélogramme. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 101.)

102. Soient le quadrilatère ABCD, la médiane MN et son milieu O; soit xy l'axe. Menons les perpendiculaires à l'axe par les différents points A, B, C, D, M, N, O.

Dans le trapèze $MmNn$, Oo qui joint les milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases

$$Oo = \frac{Mm + Nn}{2};$$

mais, dans les trapèzes $AaDd$, $BbCc$, pour les mêmes raisons, Mm et Nn sont égales à la demi-somme des bases

$$Mm = \frac{Aa + Dd}{2},$$

$$Nn = \frac{Bb + Cc}{2};$$

donc

$$Oo = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd}{4}.$$

Si nous considérons la médiane PQ, son milieu doit être encore à la distance Oo de l'axe, pour les mêmes motifs; donc ce milieu est l'intersection de MN et PQ, dont le point d'intersection de MN et PQ est le milieu de chacune d'elles. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 102.)

103. Dans les triangles semblables CPM, CBA, on a

$$\frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC}.$$

Dans les triangles AMQ, ACD, on a de même

$$\frac{MQ}{CD} = \frac{MA}{AC}.$$

Ajoutons membre à membre :

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = \frac{MC + MA}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 103.)

104. Soit le quadrilatère ABCD. Faisons l'angle ABK = CBD. Les triangles ABK, BDC seront semblables et donneront

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD}, \quad \text{ou} \quad AB \times CD = BD \times AK.$$

Les triangles BKC et ABD, aussi semblables, donneront de même

$$\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{ou} \quad AD \times BC = BD \times KC.$$

Faisons la somme de ces égalités :

$$AB \times CD + AD \times BC = BD\,(AK + KC) = BD \times AC.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 104.)

105. Soit le quadrilatère inscriptible ABCD ; les bissectrices EI, FI font un angle droit. Pour le prouver, joignons EF. Dans le triangle EIF, l'angle EIF a pour mesure une demi-circonférence, moins (IFE + FEI) ; or

$$IFE = IFB + CFE,$$
$$FEI = IED + CEF = IEA + CEF;$$

donc

$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{circonf.} - [(CFE + CEF) + (IFB + IEA)].$$

Dans le triangle FCE, (CFE + CEF) est le supplément de l'angle C, lequel appartient au quadrilatère et est supplémentaire de son opposé A ; donc CFE + CEF = A, et par suite cette somme, a pour mesure $\frac{1}{2}(CD + BC)$,

$$CFE + CEF = \tfrac{1}{2}(CD + CB);$$

d'ailleurs

$$IFB + IEA = \tfrac{1}{2}(AFB + AED);$$

mais

$$AFB = \tfrac{1}{2}(AB - CD),$$
$$AED = \tfrac{1}{2}(AD - BC);$$

donc

$$IFB + IEA = \tfrac{1}{4}(AB + AD - DC - CB);$$

donc

$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{circonf.} - \tfrac{1}{2}(CD + CB) + \tfrac{1}{4}(AB + AD - DC - CB),$$
$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{circonf.} - \tfrac{1}{4}(AB + AD + DC + CB),$$
$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{circonf.} - \tfrac{1}{4}\,\text{circonf.} = \tfrac{1}{4}\,\text{circonf.};$$

donc l'angle I est droit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 105.)

106. Soit AB $= a$ la plus grande des deux bases parallèles du trapèze considéré. Menons par le sommet D une parallèle DD′ au côté BC, par le sommet C une perpendiculaire CC′ commune aux bases parallèles, et posons

$$AB = a, \quad CD = b, \quad CC' = h, \quad CC'' = x.$$

Proposons-nous généralement de diviser la surface ABCD en deux parties dont le rapport soit celui de p à q, nous aurons

$$\frac{\text{surf. PQCD}}{\text{surf. ABCD}} = \frac{p}{p+q},$$

$$(1) \qquad \frac{\frac{1}{2}(b + PQ)x}{\frac{1}{2}(a+b)h} = \frac{p}{p+q}.$$

Les triangles semblables DD′A, DP′P donnent

$$\frac{PP'}{AD'} = \frac{x}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{PQ - b}{a - b} = \frac{x}{h}.$$

Tirant de là PQ et le substituant dans l'équation (1), il vient

$$(a-b)x^2 + 2bhx - \frac{p}{p+q}(a+b)h^2 = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{bh}{a-b} \pm \sqrt{\left(\frac{bh}{a-b}\right)^2 + \frac{p(a+b)}{(p+q)(a-b)}h^2}.$$

Pour construire la longueur x, il faudra savoir construire le radical. Or ce radical représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit seraient respectivement

$$\frac{bh}{a-b} \quad \text{et} \quad h\sqrt{\frac{p(a+b)}{(p+q)(a-b)}}.$$

On prendra une ligne contenant p des unités de longueur renfermées dans a, et l'on construira une moyenne proportionnelle α entre p et $a+b$. On construira de même une moyenne proportionnelle β entre $p+q$ et $a-b$. Le dernier radical deviendra

$$\frac{h\alpha}{\beta} = \gamma.$$

La quantité γ est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes β, h, α; de même

$$\frac{bh}{a-b}=\delta$$

est une quatrième proportionnelle aux trois lignes $a-b$, b, h. On aura donc, en posant $\sqrt{\delta^2+\gamma^2}=\varepsilon$,

$$x=-\delta\pm\varepsilon.$$

La solution $x=-\delta+\varepsilon$ (qui est évidemment positive, puisque ε est supérieur à δ, à cause de l'hypoténuse $a>b$) convient à l'énoncé. La solution $x=-\delta-\varepsilon$ conviendrait au cas où l'on supposerait la parallèle PQ sortant du trapèze.

Dans le cas particulier qui nous occupe, $p=2$, $q=3$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 106.)

107. Menons la parallèle CA′ à l'un des côtés non parallèles du trapèze. A cause des divers parallélogrammes de la figure, le côté CA′ se trouve divisé en E′ dans le rapport de 2 à 3. Par suite, la ligne EE′, qui divise les deux côtés CA, CA′ du triangle ACA′ en parties proportionnelles, est parallèle au troisième côté, et l'on a

$$\frac{EE'}{AA'}=\frac{CE}{CA}=\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5};$$

donc

$$EF=EE'+CD=\frac{3}{5}(3850^m-1245^m)+1245^m=2808^m.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 107.)

2° CONSTRUCTIONS DE QUADRILATÈRES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

108. Soit AE la longueur donnée. Supposons le problème résolu; soit ABCD le carré cherché:

$$AE=AB+BD;$$

donc

$$BD=BE.$$

Si donc on joint DE, on aura en DBE un triangle isoscèle. Or l'angle DBA, extérieur à ce triangle, est double de chacun des angles en D et E; mais

$$DBA = 45^\circ;$$

donc les angles en D et E du triangle DBE sont moitié de 45°.

Pour avoir le côté du carré, il suffira donc de faire en E un angle égal à $\frac{1}{2}$ de 45°, et d'élever en A une perpendiculaire à AE; on aura en AD le côté du carré. (*Voy.* Atlas, *fig.* 108.)

109. Soient A, B, C, D les points donnés. Supposons le problème résolu.

Soit EFGH le carré cherché.

Élevons BK, CI perpendiculaires à XY; abaissons de plus BM perpendiculaire à AH et CL perpendiculaire à DH. Les lignes BM, CL sont égales entre elles comme étant égales au côté du carré.

Les triangles BMK et CLD sont égaux, car ils ont

$$CL = BM,$$

et les angles en K et en D égaux comme ayant les côtés perpendiculaires; donc

$$BK = CD.$$

Pour résoudre le problème, il suffira donc d'élever en B une perpendiculaire à AB égale à CD, de joindre AK, de mener en B une parallèle à AK, et d'abaisser de C et D des perpendiculaires sur ces deux droites. (*Voy.* Atlas, *fig.* 109.)

110. Soient les parallèles MN et PQ, et les points A et B. Supposons le problème résolu; soit CDEF le losange cherché. Les deux hauteurs d'un losange sont égales.

Si donc du point A comme centre, avec la distance des parallèles comme rayon, nous décrivons une circonférence, et que du point B nous menions des tangentes à ce cercle, nous aurons les deux directions des droites répondant à la question.

Celle-ci aura deux solutions, une ou point du tout, selon que B sera extérieur à la circonférence décrite du point A comme centre, sera situé sur cette circonférence, ou enfin lui sera intérieur. (*Voy.* Atlas, *fig.* 110.)

111. Soit ABCD le trapèze demandé. On donne sa hauteur et la somme des bases.

Prolongeons CD de DE = AB. Nous aurons

$$CE = 2a.$$

Le triangle CBE sera d'ailleurs isoscèle, car BE = AD, et AD = CB.

On connaît la base et la hauteur de ce triangle, on le construira, ce qui donnera CB. Connaissant CB, on décrira du point B un cercle avec h pour rayon, et on lui mènera une tangente : ce sera CD. Le reste de la construction se fait sans difficulté. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 111.)

112. Supposons le problème résolu. Soit ABCD le trapèze cherché, dans lequel on donne la hauteur h, la différence des bases a.

Abaissons OKI perpendiculaire aux bases : les points K et sont les milieux de AB et CD.

Menons par le point I des parallèles à DA et CB.

Le triangle IGH est isoscèle; nous pouvons le construire, car nous connaissons IK = h et GH = a.

Connaissant IG, c'est-à-dire DA, nous inscrirons dans le cercle une corde égale à DA. Du point D avec h pour rayon, nous décrirons un cercle.

La tangente à ce cercle menée par A donnera la direction des bases du trapèze, qu'il sera facile dès lors d'achever. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 112.)

113. On donne les longueurs AB, BC, CD, DA, et la longueur de MN qui joint les milieux de AB et CD.

Des points M et N, nous décrirons des deux côtés des arcs de cercle avec des rayons

$$\frac{AD}{2} \quad \text{et} \quad \frac{BC}{2},$$

ce qui nous donnera le parallélogramme MINK.

Des points I et K nous décrirons des arcs de cercle avec $\frac{AB}{2}$ et $\frac{DC}{2}$ pour rayon, ce qui nous donnera le point L. Menons par

le point L une parallèle à MI, par le point M une parallèle à IL, par le point N une parallèle à KL.

Nous formons ainsi une figure MADN dans laquelle L est le milieu de AD. Car, dans ALIM, on a

$$AL = MI = KN,$$

et dans KNDL

$$LD = KN;$$

d'ailleurs AD est la longueur donnée pour le côté du quadrilatère; en achevant de même la figure, on voit que M et N sont les milieux des côtés ayant les longueurs données, de même que BC a la quatrième longueur donnée. Donc ABCD est le quadrilatère cherché. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 113.)

3° PROBLÈMES NUMÉRIQUES SUR LES QUADRILATÈRES.

114. Nous aurons, en appelant C le côté du carré,

$$C^2 = 3873^{h} = 387300^{ares} = 38730000^{mq}.$$
$$C = 6223^{m},34. \quad (S.)$$

115. Soit x le côté du carré; sa surface sera x^2, celle du triangle construit au-dessus sera

$$\frac{1}{4}x^2\sqrt{3};$$

en tout, la surface S vaudra donc

$$S = x^2\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$x = 2\sqrt{\frac{S}{4+\sqrt{3}}}.$$

Comme on donne $S = 33600^{mq}$,

$$x = 179^{m},459. \quad (S.)$$

116. Le quart du méridien terrestre vaut 10000000 de mètres; on a donc, en appelant R le rayon de la Terre supposée sphérique,

$$\frac{\pi R}{2} = 10000000,$$

$$R = \frac{20000000}{\pi}.$$

La surface de la Terre sera

$$4\pi R^2 = \frac{\overline{4 \times 20000000}^2}{\pi} = x^2.$$

En appelant x le côté du carré cherché, on trouve

$$x = 22567600^m. \quad (S.)$$

117. Soit $CE = 6^m$. Sur le prolongement de CE, prenons un point quelconque I et menons IM qui fasse avec CE un angle de 45°, construisons IP bissectrice de cet angle.

Du point E menons ED perpendiculaire à cette bissectrice; l'intersection de cette ligne avec CD, menée en C de façon que $ECD = 45°$, donne un second sommet du carré, qu'on achève dès lors très-aisément de construire.

Désignons par a le côté du carré, par d la diagonale et par R le rayon du cercle circonscrit; nous aurons

$$R = \frac{d}{2},$$

$$d = a\sqrt{2},$$

$$d - a = 6^m = a\sqrt{2-1};$$

faisant $d - a = 6^m$, on obtient

$$a = 14^m,485,$$
$$d = 20^m,485,$$
$$R = 10^m,242. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 117.)

118. Appelons x et y les deux côtés du rectangle, nous aurons

$$xy = 216,$$
$$2(x + y) = 60,$$

d'où nous tirons

$$x = 18^m, \quad (S.)$$
$$y = 12^m. \quad (S.)$$

119. Nous aurons, comme pour le précédent problème,

$$xy = 6400,$$
$$2(x + y) = 400;$$

d'où nous tirons

$$x = 160^m, \quad (S.)$$
$$y = 40^m. \quad (S.)$$

120. La hauteur sera, de même que AD et CB, divisée en trois parties égales.

Appelons S′, S″, S‴ les surfaces des trois trapèzes partiels.

Menons DL parallèles à CB, nous aurons pour les bases successives des trapèzes

(*a*) $b + MK$,

(*b*) $b + NK$.

Or, dans le triangle ADL, on a des parallèles à la base, d'où l'on conclut

$$MH = \tfrac{1}{3} AL = \tfrac{1}{3} \times (a - b),$$
$$MK = \tfrac{2}{3} AL = \tfrac{2}{3} \times (a - b).$$

Les valeurs des bases sont donc

(*a*) $\tfrac{1}{3}(a + 2b)$,

(*b*) $\tfrac{1}{3}(2a + b)$.

Chaque trapèze a pour mesure la demi-somme des bases par la hauteur, qui pour chacun d'eux est $\frac{h}{3}$; nous écrirons donc

$$S' = \frac{h}{18} \times (5b + a), \quad (S.)$$

$$S'' = \frac{h}{6} \times (a + b), \quad (S.)$$

$$S''' = \frac{h}{18} \times (b + 5a). \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 120.)

121. Appelons h la hauteur du trapèze ABCD; nous aurons

$$\overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{BC}^2,$$

$$h^2 + \left(\frac{DC - AB}{2}\right)^2 = \overline{BC}^2.$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs numériques, on obtient

$$h = 1^m,9468.$$

La surface S sera égale à

$$S = h \times \left(\frac{BA + DC}{2}\right) = 8^{mq},070460. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 121.)

122. Soient l et l' les longueurs des bases du trapèze, x la longueur de la ligne parallèle aux bases qui diviserait le trapèze en parties équivalentes, h et h' les deux portions dans lesquelles se trouve divisée la hauteur H; nous devons avoir

$$\frac{l + x}{2} \times h = \frac{l' + x}{2} \times h'.$$

Menons AE parallèle à BC; nous aurons des triangles semblables AFG, ADE, qui donnent

$$\frac{h}{x - l} = \frac{H}{l' - l},$$

d'où

$$h = \frac{H(x - l)}{l' - l}.$$

On trouverait de même

$$h' = \frac{H(l' - x)}{l - l'}.$$

Portant ces valeurs dans la première équation, et remplaçant les lignes par leurs valeurs, nous trouvons

$$x = 9,82,$$

et par suite

$$h = 0,56H. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 122.)

123. Appelons x la distance AF; nous aurons

$$\text{surf. ADEF} = 0{,}70 + x,$$
$$\text{surf. EFBC} = 0{,}95 + 3{,}15 - x,$$
$$x = 0^{m}{,}50. \quad (\text{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 123.)

124. Soient ABCD le trapèze donné, EF la parallèle aux bases menée à 1 mètre de CD, enfin AH une parallèle à BD.

Appelons S et h la surface et la hauteur du trapèze.

La base AB se déduit de la relation

$$S = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,H,$$

d'où l'on tire

$$AB = 6^{m}.$$

Les triangles AGE, ACH semblables donnent

$$\frac{EG}{H} = \frac{H - I}{H}, \quad \text{d'où} \quad EG = CH\frac{H - I}{H}.$$

Mais

$$CH = CD - AB = 4^{m};$$

donc

$$EG = 3^{m}.$$

Par suite,

$$EF = EG + GF = 9^{m}. \quad (\text{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 124.)

125. Appelons h la hauteur, x et y les deux bases; nous aurons

$$\tfrac{1}{2}h(x + y) = xy,$$
$$2x + 3y = 4h,$$

d'où

$$x = 13^{m}{,}1, \quad (\text{S.})$$
$$y = 4^{m}{,}6. \quad (\text{S.})$$

126. Soit I le point cherché; les figures AEFD, ECBF sont deux trapèzes de même hauteur dont les surfaces sont proportionnelles à la somme de leurs bases; de plus, AEFD est un parallélogramme; nous aurons donc

$$\frac{2AE}{BE + FC} = \frac{2}{3},$$

ou encore

$$\frac{2AE}{AB + CD - 2AE} = \frac{2}{3},$$

d'où l'on tire

$$AE = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Nous aurons

$$FC = DC - AE = 1,4.$$

Enfin les triangles AEI et IFC sont semblables; on en conclut

$$\frac{AI}{IC} = \frac{AE}{FC} = \frac{1,6}{1,4} = \frac{8}{7},$$

ce qui détermine le point I. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 126.)

127. Soit IK la parallèle à la base remplissant la condition demandée; nous aurons, en appelant K le rapport cherché,

$$\frac{CK}{AK} = \frac{IH}{IA} = \frac{y}{x} = K.$$

Nous pouvons donc raisonner comme si AC était vertical, c'est-à-dire supposer $AH = 2$; nous aurons aussi, en appelant $KL = m$,

$$(1 + m)x = (3 + m)y,$$
$$(1 + m)x = 4,$$
$$x + y = 2,$$

ce qui conduit pour K à la valeur

$$K = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$
$$K' = \quad 0,61803,$$
$$K'' = -1,61803.$$

La première valeur correspond à la ligne LK menée dans le trapèze, la seconde L'K' menée en dehors, de telle sorte que la surface du nouveau trapèze soit le double de celle du trapèze donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 127.)

128. Soit EF la parallèle qui divise le trapèze ABCD en deux parties équivalentes. Soit $KG = x$ la distance demandée; on aura

$$\left(\frac{CD + AB}{2}\right) CG = 2\left(\frac{EF + AB}{2}\right) x,$$

ou bien

(1) $$15 \times 7 = 105 = x(18 + EF).$$

Or, si l'on mène CN parallèle à DB, on aura

$$EF = ME + FM = ME + CD = ME + 12.$$

Les deux triangles CEM et CAN donnent

$$\frac{EM}{AN} = \frac{CK}{CG},$$

ou bien

$$\frac{EM}{AB - CD} = \frac{CG - KG}{CG},$$

ou enfin

$$\frac{EM}{6} = \frac{7 - x}{7},$$

d'où

$$EM = \frac{42 - 6x}{7}.$$

Donc, en substituant dans (1), il viendra

$$105 = x\left(18 + 12 + \frac{42 - 6x}{7}\right),$$

et en simplifiant

$$6x^2 - 252x + 735 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x' = 38^m,84, \quad x'' = 3^m,15.$$

La seconde solution peut seule convenir; donc

$$KG = 3^m,15. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 128.)

129. La surface du trapèze est

$$ABCD = \frac{AB + CD}{2} \times AE.$$

Or les deux triangles rectangles AEC et BFD sont égaux comme ayant un côté égal et un angle aigu égal; par suite

$$CE = FD = \frac{CD - AB}{2} = 1^m,0245.$$

Or

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{2,2^2 - 1,0245^2}.$$

Donc la surface cherchée vaudra

$$4,1455\sqrt{2,2^2-1,0245^2}=8^{mq},0792. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 129.)

130. Je mène AE, BF perpendiculaires à CD, et j'ai

$$BF=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{FD}^2},$$

donc

$$BF=\sqrt{\overline{203}^2-\overline{95}^2}=\sqrt{32184},$$

$$\overline{FD}^2=\left(\frac{CD-AB}{2}\right)^2.$$

Dans le triangle BFC, on a

$$BC=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{FG}^2}=\sqrt{32184+\overline{643}^2}=\sqrt{445633},$$

ou enfin

$$BC=AD=667,557. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 130.)

131. Nous avons, par hypothèse,

$$\frac{DFAE}{CFEB}=\frac{2}{3},$$

ou bien

$$\frac{CFEB}{CDAB}=\frac{3}{5};$$

d'ailleurs on a

$$\frac{CFEB}{CDAB}=\frac{CF+5-(3-CF)}{3+5}=\frac{2CF+2}{8}=\frac{CF+1}{4}.$$

On en conclut donc

$$\frac{CF+1}{4}=\frac{3}{5},$$

d'où

$$CF=\frac{7}{5},$$

et en divisant les deux membres de cette égalité par 3, mesure de CD,

$$\frac{CF}{CD}=\frac{7}{15}.$$

Les deux triangles semblables CIF et CDA donnent

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CI}{CA}.$$

On aura donc

$$\frac{CI}{CA} = \frac{7}{15},$$

d'où l'on voit que CI vaut les $\frac{7}{15}$ de la diagonale CA. (S.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 131.)

132. Soient IF la droite demandée, $AF = x$, $DC = b$, $DI = m$ $AB = B$, H la hauteur du trapèze; nous aurons

$$\text{surf. DAIF} = (m + x)\frac{H}{2},$$

$$\text{IFCB} = (b - m + B - x)\frac{H}{2},$$

et par suite on a l'équation

$$m + x = b - m + B - x,$$

d'où

$$2x = b + B - 2m,$$

$$x = \frac{b + B - 2m}{2}.$$

Pour les données, on aura

$$x = \frac{4,50 + 6 - 3}{2} = \frac{7,50}{2} = 3^m,75. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 132.)

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES SUR LA CIRCONFÉRENCE ET LE CERCLE.

1° CONSTRUCTIONS DE PROPRIÉTÉS OU CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

133. Faisons l'angle HCK = 60°. Le triangle HKC sera équilatéral, car l'angle BHC = BAC = 60°; donc

$$HK = HC.$$

Reste à prouver que HA = KB.

Or les triangles AHC, BKC sont égaux, car

$$HC = KC,$$
$$AC = BC,$$

et les angles en C sont égaux comme ayant même différence à 60°. Donc

$$AH = BK,$$

donc

$$HB = HA + HC.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 133.)

134. En effet, l'angle F a pour mesure $\frac{1}{2}(AC + CG)$, l'angle E $\frac{1}{2}(BG + AC)$; faisons la somme

$$F + E = \tfrac{1}{2}(AC + CG + GB + AC).$$

Comme AC = AB, on voit que cette somme est la moitié de la circonférence, ce qui montre que le quadrilatère est inscriptible. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 134.)

135. Menons OG perpendiculaire à CD; nous aurons

$$CG = GD,$$
$$OE = CG,$$
$$OF = GD,$$

d'où l'on conclut

$$OF = OE.$$

Les différences de ces lignes aux rayons sont donc égales;

$$AE = FB.$$ C. Q. F. D.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 135.)

136. Je mène la ligne des centres MN. Je joins BM, B'N. Les triangles rectangles PMB, PNB' sont semblables, car les angles en P sont opposés au sommet; donc on a

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{PM}{PN}.$$

Joignant NA', MA, on aura de même

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PM}{PN},$$

et, rapprochant les deux égalités de rapports,

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{PA}{PA'};$$

donc les triangles PAB, PA'B' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc les côtés AB, A'B' sont parallèles. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 136.)

137. En effet, les angles BAC et BOC sont égaux, comme ayant même mesure, de même que B'AC' et B'OC'; mais

$$BOC = B'OC',$$

comme opposés au sommet; donc

$$ABC = A'B'C'.$$

On démontrerait de même l'égalité des autres angles. Donc les triangles sont semblables. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 137.)

138. Supposons le problème résolu. Nous aurons

$$\frac{BN}{BM} = \frac{m}{n}.$$

Abaissons du centre OI perpendiculaire à BN; le point I est le milieu de MN, et nous aurons

$$\frac{BN}{BM} = \frac{m}{n},$$

$$\frac{BN - BM}{BM} = \frac{m-n}{m} = \frac{MN}{BM};$$

or

$$MN = 2MI;$$

donc

$$\frac{MI}{MB} = \frac{m-n}{2n}.$$

Menons MH parallèle à OI; nous aurons

$$\frac{OH}{BH} = \frac{IM}{BM} = \frac{m-n}{2n}.$$

Ainsi, pour avoir le point H, il faut diviser OB en deux parties qui soient dans le rapport $\frac{m-n}{2n}$.

Ayant le point H, sur HB on décrira une circonférence dont l'intersection avec la circonférence donnée fournira le point M, car l'angle $M = I = 90°$.

Pour que le problème soit possible, il faut que les circonférences se coupent, que par conséquent on ait, en appelant $AB = a$ et $OA = R$,

$$a < BH < a + 2R;$$

mais

$$BH = \frac{2n(a+R)}{m+n}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$a < \frac{2n(a+R)}{m+n} < a + 2R;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a}{a+2R} < \frac{m}{n} < \frac{a+2R}{a},$$

c'est-à-dire que le rapport donné doit être compris entre $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{BC}{AB}$; ce que l'on pouvait prévoir aisément. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 138.)

139. Joignons MO; nous aurons en MO la médiane du triangle CMD; donc

$$\overline{CM}^2 + \overline{MD}^2 = \overline{2MO}^2 = \overline{2CO}^2 = \text{const.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 139.)

140. Menons BD; le triangle ABD est rectangle en D et semblable au triangle rectangle AEC, puisqu'ils ont l'angle A commun. Nous aurons donc

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

$$AD \times AC = AE \times AB = \text{const.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 140.)

141. En effet, quelle que soit la direction de la ligne APA', l'angle PAQ a toujours pour mesure la moitié de l'arc N, et l'angle PA'Q la moitié de l'arc M; l'angle AQA', qui est la différence entre 180° et la somme des angles A et A', a donc aussi une mesure constante. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 141.)

142. Soient les cordes AB, CD. Abaissons du centre des perpendiculaires OP, OQ sur ces lignes. Les points P et Q sont les milieux de AB et CD.

Menons le diamètre qui passe par l'intersection des cordes, nous aurons

$$AI.IB = CI.ID.EI.IF,$$

$$(AP - IP)(AP + IP) = (CQ - IQ)(CQ + IQ)$$
$$= (OE - OI)(OE + OI),$$

$$\overline{AP}^2 - \overline{IP}^2 = \overline{CQ}^2 - \overline{IQ}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OI}^2.$$

En désignant par R le rayon du cercle et par a la longueur OI, nous pouvons écrire l'égalité précédente

$$\frac{\overline{AP}^2 - \overline{PI}^2}{1} = \frac{\overline{CQ}^2 - \overline{IQ}^2}{1} = \frac{R^2 - a^2}{1},$$

$$\frac{\overline{AP}^2 + \overline{CQ}^2 - (\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2)}{2} = R^2 - a^2.$$

Or

$$\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2 = a^2,$$

donc

$$\overline{AP}^2 + \overline{CQ}^2 = 2R^2 - a^2.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 142.)

143. Soient le triangle ABC, le point M du cercle circonscrit et les perpendiculaires MP, MQ, MR. Joignons PQ, PR.

Les angles RMP, ABC sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; il en est de même des angles PMQ et BAC; nous aurons donc

$$RMP + PMQ = A + B,$$

ou bien

$$RMB + BMP + PMA - QMA = A + B,$$

ou enfin

$$AMB + RMB - QMA = A + B.$$

Or nous savons que, dans le triangle ABC, on a

$$A + B = 180^\circ - C,$$

mais que le quadrilatère inscrit ACBM donne également

$$AMB = 180^\circ - C,$$

d'où l'on conclut

$$RMB = AMQ.$$

Le quadrilatère MPBR est inscriptible, puisque les angles R et P sont droits; donc les angles RMB, RPB sont égaux, comme ayant même mesure; on verrait de même que

$$AMQ = APQ,$$

donc

$$RPB = APQ;$$

AB est une ligne droite, donc RPQ en est aussi une, ce qu'il fallait démontrer. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 143.)

144. Soit O le centre du cercle; joignons OM; cette ligne est bissectrice de l'angle AMB, car les angles FMO, OME sont droits, et les angles FMA, EMB égaux par hypothèse; la ligne ME sera donc aussi la bissectrice de l'angle BMH.

Nous aurons donc

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AM}{MB} = \frac{AE}{BE}.$$

Nous pourrons donc déterminer aussi le point E, et par conséquent le point M. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 144.)

145. Soient le point A intersection des circonférences O et O' et la droite MN, supposée menée égale à une longueur donnée.

Des points O et O′ abaissons sur MN les perpendiculaires OI et OI′; les points I et I′ étant les milieux des cordes, nous aurons

$$II' = \frac{1}{2} MN.$$

Menons O′B parallèle à MN, jusqu'à la rencontre de OI.

Nous aurons

$$O'B = II' = \frac{1}{2} MN,$$

de plus

$$OBO' = 90^\circ.$$

Pour résoudre le problème, on décrira donc sur OO′ un demi-cercle, on inscrira en O′B une corde égale à la moitié de la longueur donnée, et l'on mènera en A une parallèle à cette droite; on voit que le problème a deux solutions. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 145.)

146. Supposons le problème résolu; soit ABA′B′ une ligne parallèle à XY, et telle que

$$AB + A'B'$$

soit égal à une longueur donnée $2a$.

Abaissons OC, OC′ perpendiculaires sur la sécante ou sur sa parallèle XY.

La distance CC′ de ces perpendiculaires nous est connue, puisque les perpendiculaires elles-mêmes le sont. Mais CC′ se compose de A′B et de $CB + A'C' = a$.

Nous connaissons donc A′B.

Or, si par les différents points de la circonférence O′ on mène des lignes parallèles à XY et toutes égales à A′B, les extrémités de ces droites formeront une circonférence, dont on obtiendra le centre en menant O′G égal à A′B, et dont le rayon est le même que celui de O′.

Cette circonférence décrite coupera la circonférence O en B, ce qui permet de résoudre le problème. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 146.)

147. Soit A le point d'intersection de deux cercles O et O′; supposons la ligne CC′ menée de telle sorte qu'elle ait son milieu en A.

Menons OP et O′P′, perpendiculaires à CC′,

$$PP' = \frac{1}{2} CC' \quad \text{et} \quad PA = P'A.$$

Si donc nous menons AB parallèle à OP, le point B sera le milieu de OO′ et la corde CC′ sera la perpendiculaire en A, à la droite AB. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 147.)

148. Soit le cercle O inscrit dans un angle XAY; on demande de lui mener une tangente BC, dont la partie comprise entre les côtés de l'angle ait une longueur donnée.

Soient F, E, I les points de contact de la circonférence O avec les lignes AX, AY, BC.

Inscrivons un second cercle O′ dans la figure XBCY.

Soient D, H, G les points de contact de ce cercle.

Les tangentes à un cercle issues du même point sont égales. Nous aurons donc

$$BD = BH,$$
$$CG = CH.$$

Ajoutant $BD + CG = BH + CH = BC$, on aurait de même

$$BE + CF = BC,$$

par suite

$$(1) \qquad BD + CG = BE + CF.$$

D'ailleurs on voit immédiatement que

$$ED = FG,$$

égalité que nous écrirons

$$(2) \qquad BD + DE = GC + CF.$$

Combinant (1) et (2) successivement par addition et par soustraction, nous trouvons

$$BD = CF, \quad BE = GC;$$

donc

$$BC = DE.$$

Comme la longueur BC est connue, il s'ensuit qu'on peut déterminer les points B et G, par suite le cercle O′.

Ayant tracé ce cercle, on obtiendra BC en menant une tangente commune intérieure à O et O′.

On voit qu'il y a deux solutions. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 148.)

149. Joignons CO et prolongeons jusqu'à la rencontre de la circonférence en E; joignons EN et prolongeons jusqu'à la rencontre du cercle en F.

Les triangles COM, EON sont égaux; donc CM et EN sont égaux et parallèles; donc les arcs CF et PE sont égaux.

L'angle CPE est droit, puisque CE est un diamètre; il en est de même, et pour la même raison, de CFE.

Mais les angles CFE et PEF ont des mesures égales. En effet, l'un a pour mesure

$$\frac{PC + PE}{2},$$

l'autre

$$\frac{PC + CF}{2},$$

et nous savons que

$$CF = PE;$$

donc l'angle PEF est droit, et la ligne PF est un diamètre.

Joignons enfin ED : l'angle DNE extérieur au triangle PNE est égal à la somme

$$PEN + NPE = 1^{dr} + NPE.$$

L'angle PNE est connu de grandeur, puisque l'on connaît l'arc DE. On connaîtra donc l'angle DNE; on construira le segment capable de cet angle sur DE; le poin N sera donné par l'intersection de ce segment avec AB.

Joignant DN et prolongeant, on obtiendra le point P cherché. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 149.)

150. Supposons le problème résolu. Soit MN la ligne cherchée. Joignons OA, et prolongeons jusqu'en D, de façon que

$$\frac{OA}{AD} = \frac{m}{n}.$$

Joignons DN. Les triangles MOA, AND seront semblables; d'où nous concluons

$$\frac{DN}{OM} = \frac{n}{m},$$

ou

$$DN = R\,\frac{n}{m}.$$

Pour résoudre le problème, on construira donc le point D, puis DN, qui est une quatrième proportionnelle à R, n et m. On dé-

crira un arc de cercle avec DN pour rayon, ce qui donnera le point N. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 150.)

151. Soient les cercles A, B, C; I le point d'intersection de EF et GH. Supposons un instant que LI prolongé vienne passer en S et B, et non en K. Nous aurons

$$\text{Dans C.....} \quad IE \times IF = IG \times IH,$$
$$\text{Dans A.....} \quad IE \times IF = IL \times IS,$$
$$\text{Dans B.....} \quad IG \times IH = IL \times IR;$$

d'où nous concluons

$$IS = IR,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les points S et R se confondent avec ce point K. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 151.)

152. Soit le cercle O roulant dans le cercle I de rayon double. Prenons le point de contact A des deux cercles; la démonstration n'est pas moins générale, car tous les points du cercle O viennent successivement au contact du cercle I.

Lorsque le cercle O sera venu en O', le point de contact sera B, et le cercle coupera en C le diamètre IA. On a dans le cercle I

$$\text{arc}\,AB = \pi . AIB \times IA.$$

On a également dans le cercle O', en se rappelant que le rayon est égal à $\frac{1}{2}$ IA,

$$\text{arc}\,BC = \pi . CO'B \times \tfrac{1}{2} IA.$$

Or l'angle CO'B est double de l'angle AIB; on a donc

$$\text{arc}\,BC = \pi . AIB \times AI,$$

c'est-à-dire

$$\text{arc}\,BC = \text{arc}\,AB.$$

Le point C est donc la position occupée par le point A quand le cercle est passé de O en O'. Il en résulte que le point A, dans le mouvement, décrit le diamètre AI. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 152.)

153. Soient le point A et les cordes ABC, ADE. Le point d'intersection I des diagonales BE, CD sera constant.

Le point O étant à égale distance de AC et AE, la ligne OA est la bissectrice de leur angle; de plus, BC et DE sont égales entre elles.

Si donc on compose les triangles BIC, DIE, on voit qu'ils sont égaux. Il en résulte que les distances du point I aux sécantes sont égales, c'est-à-dire que le point I est sur la bissectrice AO.

Joignons OE; les triangles ADI, AOE ont l'angle A commun; de plus, l'angle MOE a pour mesure ME; l'angle ADI a pour mesure $\frac{1}{2}(CD + DE) = ME$; donc ces triangles sont semblables et donnent

$$\frac{AI}{AE} = \frac{AD}{AO},$$

ou bien

$$AI = \frac{AD \times AE}{AO}.$$

Si nous menons la tangente AT, nous aurons

$$\overline{AT}^2 = AD \times AE;$$

donc

$$AI = \frac{\overline{AT}^2}{AO}.$$

En d'autres termes, le point I est le pied de la perpendiculaire abaissée du point T sur AO; donc ce point est constant. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 153.)

154. Soit $AD = x$; on a

$$\overline{AD}^2 = DE \times DF \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} + 2R\right),$$

d'où

$$3x^2 = 4Rx$$

et, divisant par x,

$$x = \frac{4R}{3}.$$

En prenant

$$AD = AK = \tfrac{4}{3}R,$$

on mènera la sécante DC. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 154.)

155. Soient OA l'une de ces cordes et $AA' = OA$.

Je mène le diamètre OC que je prolonge jusqu'en C′, de telle sorte que $CC' = OC$.

Je joins CA, C′A′. L'angle OAC est droit comme inscrit dans un demi-cercle; l'angle OA′C′ lui est égal, car AC est parallèle à

A′C′ comme divisant les côtés OC′ et OA″ en segments proportionnels. Donc l'extrémité de chaque corde appartient à la circonférence décrite sur OC′ comme diamètre. Le rapport de ces deux cercles vaudra donc $\frac{1}{4}$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 155.)

156. Quand deux cercles se coupent en un point O, si par ce point on mène trois droites qui les rencontrent en a, b, c, a', b', c', prouver que les deux triangles abc, $a'b'c'$ sont semblables.

En effet, on a les angles

$$a'c'b' = a'Ob', \qquad acb = bOa,$$
$$b'a'c' = b'Oc', \qquad bac = cOb,$$

comme inscrits dans les mêmes segments. Or

$$a'Ob' = aOb, \qquad b'Oc' = bOc,$$

comme opposés par le sommet. Donc les deux triangles sont semblables comme ayant deux angles égaux. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 156.)

157. Je joins MO qui sera la médiane du triangle.

D'après un théorème du IIIe Livre, on a

$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2\overline{MO}^2 + 2\overline{CO}^2.$$

Or, quelle que soit la position du point M sur la circonférence, les longueurs MO et CO ne varient pas. Donc la somme $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$ reste constante; ce qu'il fallait démontrer. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 157.)

2° CONSTRUCTIONS DE CIRCONFÉRENCES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES.

158. Le centre du cercle cherché devra se trouver à une distance du centre du cercle donné égale à la somme des rayons.

En second lieu, il devra se trouver à une distance du point donné égale au rayon. On l'obtiendra donc par l'intersection de deux arcs de cercle décrits comme nous venons de le dire.

159. Soient donnés le point B et le point A, où le cercle doit toucher le cercle O. Le centre du cercle cherché sera sur la

ligne OA prolongée, car le point de contact est sur la ligne des centres. Le centre est d'ailleurs à égale distance des points A et B; il se trouve donc sur la perpendiculaire IC élevée au milieu de AB.

Il est donc à l'intersection de OA et IC. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 159.)

160. Supposons le problème résolu. Soit le cercle O passant par les points A et B, et tangent à CX au point D; prolongeons AB jusqu'à la rencontre avec CX; nous aurons

$$\overline{CD}^2 = CB \times CA.$$

Pour déterminer le point D, il suffit donc de construire une moyenne proportionnelle aux droites CA et CB que nous connaissons; pour cela, on mènera une circonférence quelconque passant par les points A et B, et on lui mènera une tangente CS; on prendra ensuite CD = CS. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 160.)

161. Soit à construire un cercle tangent aux droites AX et AY et passant par le point B. Il est clair que le centre du cercle cherché se trouve sur la bissectrice AS de l'angle XAY. Par conséquent, en prenant le symétrique de B par rapport à AS, on a un deuxième point B′ de la circonférence, et l'on est ramené au cas traité précédemment (160). (*Voy.* ATLAS, *fig.* 161.)

162. Appelons O, O′, O″ les centres des trois cercles donnés, C celui du cercle cherché; appelons r les rayons des circonférences données, R le rayon cherché.

Le point C est distant de chacun des points O, O′, O″ de la longueur $R + r$. Il est donc le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux des côtés du triangle OO′O″.

163. Soit à construire une circonférence tangente à la circonférence O et passant par les points A et B.

Supposons le problème résolu.

Soit D le point de contact des deux cercles. Menons en ce point la tangente commune qui rencontrera en C le prolongement de AB, nous aurons

$$\overline{CD}^2 = CA \times CB;$$

mais, si l'on mène par le point C une sécante quelconque CFE, nous aurons également

$$\overline{CD}^2 = CE \times CF,$$

d'ou il résulte

$$CE \times CF = CA \times CB.$$

Les quatre points E, F, A, B sont donc sur une même circonférence, et inversement toute circonférence passant par les points A et B vient rencontrer le cercle O en deux points E et F, satisfaisant à la relation précédente.

Pour résoudre le problème, il suffira donc de faire passer un cercle par les points A et B; prenant l'intersection de AB avec la corde d'intersection des deux circonférences, on aura le point C; on mènera une tangente au cercle O, puis il suffira de faire passer un cercle par les points A, B, D. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 163.)

164. Soit à construire une circonférence passant par les points A et B et interceptant sur CX une longueur a. Soit C le point de rencontre de AB avec CX. Prenons sur CX un point P tel que $\overline{CP}^2 = CA \times CB$. Élevons $PQ = a$ perpendiculaire à CX. Sur PQ comme diamètre décrivons une circonférence; soit I son centre : la ligne CI coupe la circonférence I aux points G et H; reportons CG et CH sur CX en CD et CE.

Le quadrilatère ABDE est inscriptible, puisque nous avons

$$CG \times CH = CD \times CE = \overline{CP}^2 = a^2 = CA \times CB.$$

La circonférence passant par les quatre points A, B, D, E, et qu'il est facile de construire, sera donc la circonférence demandée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 164.)

165. Soit à mener une circonférence passant par les points A et B, et interceptant dans la circonférence O une corde de longueur donnée MN.

Faisons passer par A et B une circonférence quelconque coupant la circonférence O aux points D et E; prolongeons AB et DE jusqu'en leur rencontre en C. Inscrivons une corde MN, ayant la longueur donnée dans O, et décrivons la circonférence concentrique de O, tangente à MN. Menons CS tangente à cette circon-

férence. Cette ligne coupe en G et H la circonférence donnée et

$$GH = MN;$$

de plus

$$CG \times CH = CD \times CE = CA \times CB.$$

La figure GHAB est donc inscriptible, et la circonférence qui lui est circonscrite est la circonférence demandée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 165.)

166. Soient les lignes MN et PQ, et $2a$ la somme des cordes. Supposons le problème résolu. Soit O le cercle cherché. Menons OI perpendiculaire aux droites et $EF = a$ par le milieu G de IH; joignons OE, qui sera perpendiculaire à AC.

Il suffit donc, pour résoudre le problème, d'abaisser une perpendiculaire du point O sur les droites données, de prendre le point G milieu de IH; de mener par le point G une droite égale à a, de joindre EO et de mener AC perpendiculaire à OE, ce qui donnera deux points du cercle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 166.)

167. Le théorème peut se déduire du suivant:

Étant donnés deux cercles tangents, si, par le point de contact P, *on mène deux sécantes quelconques* AA′, BB′, *les droites* AB, A′B′ *sont parallèles.*

On peut démontrer cette proposition de plusieurs manières; la démonstration suivante est la plus connue :

Menons la tangente commune MN; les angles PAB, BPN seront égaux comme ayant même mesure $\frac{BP}{2}$; les angles PA′B′, B′PM seront égaux par la même raison; mais BPN = MPB′ : donc PAB = PA′B′. Ces deux angles étant dans la position des angles alternes-internes, les deux droites AB, A′B′ sont parallèles.

Cela posé, si l'on imagine que le cercle O′ tourne autour de la droite MN comme charnière et qu'il occupe la position représentée (*fig.* 167 *bis*), les choses demeureront les mêmes : conséquemment le théorème proposé est démontré.

On peut, du reste, donner une démonstration directe. Soit P le point de contact et soit MN la tangente commune, on voit que les angles MPA et A′B′P sont égaux, ainsi que les angles MPA et ABP : donc les angles A′B′P et ABP sont égaux; mais, ces

derniers étant dans la position des angles correspondants par rapport aux droites AB, A'B' et à la transversale PB, il s'ensuit que AB et A'B' sont parallèles. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 167 et 167 *bis.*)

168. La tangente AD est moyenne proportionnelle entre la sécante entière DF et sa partie extérieure DE. On a donc

$$(1) \qquad \overline{DA}^2 = DE.DF.$$

Posons $AD = 2x$, $FE = 2r$. Comme on doit avoir $AD = 2DE$, l'équation (1) devient

$$4x^2 = x(x + 2r).$$

Supprimant la solution $x = 0$, qui, à la rigueur, répond à l'énoncé, il reste

$$4x = x + 2r, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2r}{3}.$$

Ainsi

$$AD = 2x = \frac{4r}{3}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 168.)

3° PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

169. Appelons x la distance à laquelle s'étend la vue : nous aurons, en menant le diamètre passant par A,

$$\overline{AD}^2 = AB \times AC,$$
$$x^2 = 50\,(2 \times 6\,366\,198 + 50),$$
$$x = 25\,231^{\text{m}}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 169.)

170. On demande que $DE = \frac{1}{2}DA$. Prolongeons DC jusqu'en F, nous aurons

$$\overline{DA}^2 = DE \times DF,$$
$$DA^2 = \tfrac{1}{2}DA\,(\tfrac{1}{2}DA + 2R);$$

donc

$$DA = \tfrac{4}{3}R.$$

Il faut donc prendre sur la tangente une longueur égale aux $\frac{4}{3}$ du rayon. (S.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 170.)

171. On demande la valeur de OB et celle de l'angle OCB. Nous aurons

$$OD = OC \times \sin OCB,$$
$$\sin OCB = \frac{OD}{OC} = \frac{R}{OC},$$
$$OB = OC \operatorname{tang} OCB,$$
$$OCB = 33^\circ 6' 53'',53, \quad (S.)$$
$$OB = 1302^m,565. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 171.)

172. Appelons R et R′ les rayons des cercles donnés et r celui du cercle cherché; nous aurons

$$\pi(R^2 + R'^2) = \pi r^2;$$

mais

$$R' = R + 1 \quad \text{et} \quad R = 20,$$
$$2R^2 + 2R + 1 = r^2,$$
$$800 + 40 + 1 = r^2,$$
$$r = 29^m. \quad (S.)$$

173. Menons AK parallèle à la tangente commune; nous aurons

$$\overline{KB}^2 = x^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AK}^2 = \overline{AB}^2 - (AC - BD)^2,$$
$$x = 697^m,493. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 173.)

174. Soient R et r les rayons des cercles, d la distance des centres, x la surface cherchée, φ et φ' les angles AOO′ et AO′O; soient enfin S, s et s' les surfaces du triangle AOO′ et des secteurs AON, AO′M.

$$\frac{x}{2} = s + s' - S.$$

Dans le triangle AOO′, les trois côtés sont connus, ce qui permet de calculer la surface S et les angles φ et φ'; on a ensuite

$$s = \frac{\pi R^2 \varphi}{360},$$
$$s' = \frac{\pi r^2 \varphi'}{360}.$$

Effectuant les calculs,

$$x = 1^{mq},9950. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 174.)

175. Désignons par φ l'angle BAC, par R le rayon du cercle et par S la surface cherchée,

$$S = ABDC = OBAC - OBDC.$$

Or le quadrilatère OBAC est double du triangle OBA, et celui-ci a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}R^2 \cot\frac{\varphi}{2},$$

$$OBAC = R^2 \cot\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$OBDC = \frac{\pi R^2(180^\circ - \varphi)}{360}.$$

Nous avons donc

$$S = R^2\left[\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{\pi(180 - \varphi)}{360}\right].$$

Faisons

$$\varphi = 38^\circ 42' 25'' \quad \text{et} \quad R = 5;$$

nous avons

$$S = 40^{mq},3505. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 175.)

176. Appelons R le rayon cherché, nous aurons

$$\text{triangle OAB} = \tfrac{1}{2}R^2 \sin 30^\circ,$$

$$\text{segment AMB} = \tfrac{1}{12}\pi R^2 - \tfrac{1}{2}R^2 \sin 30^\circ.$$

Nous aurons donc

$$R^2 \sin 30^\circ - \tfrac{1}{2}\pi R^2 = 2^{mq},$$

$$R = \sqrt{\frac{2}{\sin 30^\circ - \frac{\pi}{12}}} = 2^m,898. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 176.)

177. La circonférence vaut 1 296 000″ ; d'ailleurs

$$\begin{aligned} 27^\circ &= 97200'' \\ 17' &= 1020'' \\ 32'' &= 32'' \\ \hline & \ 98252''. \end{aligned}$$

Soit en somme

Le rapport demandé est donc

$$\frac{98252}{1,296000} = 0,07581. \quad (S.)$$

178. Puisque $AI = \frac{1}{2} AB$, l'angle $CAD = 120° = \frac{1}{3} \times 360°$ et $CD = AB\sqrt{3}$.

Cela posé, nous aurons

$$\text{segment } CBD = \text{secteur } CADB - \text{triangle } CAD$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi R^2 - R\sqrt{3} \times \frac{R}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$\text{segment } CED = \text{secteur } CAED + \text{triangle } CAD$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi R^2 + R\sqrt{3} \times \frac{R}{4} = R^2\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Le rapport demandé est

$$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}} = 0,24. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 178.)

179. Appelons x l'angle cherché ; on sait que la surface d'un triangle est donnée par la formule

$$S = \tfrac{1}{2} ab \sin C;$$

ici $a = b = R$, en appelant R le rayon du cercle, et $C = x$; d'ailleurs $S = \frac{1}{12}\pi R^2$. Nous aurons donc

$$\tfrac{1}{2} R^2 \sin x = \tfrac{1}{12}\pi R^2,$$

$$\sin x = \tfrac{1}{6}\pi,$$

$$x = 31°34'26'',2. \quad (S.)$$

180. La surface cherchée est la différence du secteur, qui a pour mesure

$$2\pi R \times \frac{\alpha}{360} \times \frac{R}{2} = \tfrac{1}{6}\pi R^2,$$

et du triangle AOB, qui a pour mesure

$$\tfrac{1}{2} AB \times OC,$$

ou

$$\tfrac{1}{2}R\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AC}^2}=\tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\tfrac{1}{4}R^2\sqrt{3},$$

$$S=\tfrac{1}{6}\pi R^2-\tfrac{1}{4}R^2\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}R^2(\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}),$$

$$S=2^{\text{hect.}}\,96^{\text{ares}}\,42^{\text{cent.}}\quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 180.)

181. Soient R et R′ les rayons des deux cercles et a la longueur de l'arc de 37 degrés dans le cercle de rayon 1; nous aurons, en appelant S la surface cherchée,

$$S=AOB-A'OB',$$
$$AOB=AB\times\tfrac{1}{2}R,$$
$$=Ra\times\tfrac{1}{2}R=\tfrac{1}{2}R^2a,$$
$$A'OB'=\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}R'^2a;$$

donc

$$S=\tfrac{1}{2}a(R^2-R'^2).$$

D'ailleurs

$$a=\frac{\pi\times 37}{180}=0{,}64577.$$

Faisons de plus

$$R=7^{\text{m}},5,$$
$$R'=2^{\text{m}},5,$$
$$S=16^{\text{mq}},1443.\quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 181.)

182. Nous aurons

$$AI=AO+OI=R+OI,$$
$$IB=OB-OI=R-OI;$$

mais

$$OI=\sqrt{\overline{CO}^2-\overline{IC}^2}=\sqrt{R^2-\overline{IC}^2}=23{,}06.$$

Par suite,

$$AI=49^{\text{m}},06,\quad (S.)$$
$$IB=\ 2^{\text{m}},94.\quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 182.)

183. Soit O le centre du cercle, CD le diamètre perpendiculaire aux lignes AB et xy, R le rayon cherché. On nous donne $AB=2a$ et $IC=b$. Nous aurons

$$\overline{AI}^2=a^2=IC\times ID=b(2R-b);$$

donc

$$R = \frac{a^2 + b^2}{2b}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 183.)

184. Il est évident qu'il y a un maximum; en effet,

$$MP + MQ = MP + OP$$

est égal d'abord au rayon r, lorsque M est en D, puis croît jusqu'à un certain point pour devenir de nouveau égal à r quand M est en A.

Appelons $MP = x$, $MQ = OP = y$, m le maximum cherché; nous aurons

$$x + y = m,$$
$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$x + \sqrt{r^2 - y^2} = m,$$
$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{2r^2 - m^2}{4}};$$

m^2 ne pouvant croître au delà de $2r^2$, le maximum de m^2 est $2r^2$, d'où

$$m = r\sqrt{2}.$$

On en conclut

$$x = y = \tfrac{1}{2} r\sqrt{2};$$

il faut donc que M soit au milieu du quadrant. (S.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 184.)

185. On a surf. $OAB = \frac{1}{2} r^2 \sin AOB$; le maximum a lieu pour le maximum de $\sin AOB$; on sait que le maximum est 1 pour $AOB = 90°$.

Le triangle maximum est donc le quart du carré inscrit; le rapport de la surface du triangle à celle du cercle est

$$\frac{\frac{1}{2}R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2\pi} = 0{,}1591549. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 185.)

186. Soit ACB l'arc de 300 degrés, l'arc ADB vaut 60 degrés et AB égale le rayon. Si l'on évalue le segment ADB et qu'on le retranche du cercle entier, on aura l'aire du segment ACB.

Or on a

$$\text{segment ADB} = \text{secteur AOB} - \text{triangle AOB},$$

$$\text{secteur AOB} = \frac{\pi R^2}{6},$$

$$\text{triangle AOB} = \frac{R^2}{4}\sqrt{3},$$

d'où

$$\text{segment ADB} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2}{4}\sqrt{3}.$$

Donc

$$\text{segment ACB} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2}{4}\sqrt{3} = \frac{5\pi R^2}{6} + \frac{R^2}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{R^2}{12}(10\pi + 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{12}(31{,}4159 + 5{,}1960)$$

$$= R^2\left(\frac{36{,}6119}{12}\right) = R^2 \times 3{,}0509.$$

En faisant $R = 1$, on trouve

$$\text{segment ACB} = 3^{mq},05. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 186.)

187. Il s'agit de calculer les expressions des surfaces des deux segments ACB et ADB.

$$\text{segment ACB} = \text{secteur AOBC} - \text{triangle AOB}.$$

AB est le côté du triangle équilatéral; donc

$$\text{secteur AOBC} = \frac{\pi R^2}{3},$$

$$\text{triangle AOB} = \frac{AB \times EO}{2} = \frac{R\sqrt{3} \times R}{2 \times 2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4},$$

où

$$\text{segment ACB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

Le segment ADB est la différence entre le cercle et le segment ACB. On a donc

$$\text{segment ADB} = \pi R^2 - \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2(8\pi + 3\sqrt{3})}{12}.$$

Ainsi

$$\text{segment ACB} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}, \quad \text{(S.)}$$

$$\text{segment ADB} = \frac{R^2(8\pi + 3\sqrt{3})}{12}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 187.)

188. Soient $OC = x$, $OD = y$; on a

(1) $$x - y = 1{,}84;$$

d'autre part,

$$xy = OA.OB = 1{,}2 \times 2{,}1,$$

ou

(2) $$xy = 2{,}52.$$

Les équations (1) et (2) donnent de suite les valeurs des inconnues. Tirant de l'équation (1) la valeur de x,

$$x = 1{,}84 + y$$

et la substituant dans l'équation (2), on obtient

$$y^2 + 1{,}84y - 2{,}52 = 0;$$

d'où

$$y = -0{,}92 \pm \sqrt{(0{,}92)^2 + 2{,}52},$$
$$y = -0{,}92 \pm 1{,}834.$$

La valeur négative ne convient pas à la question; on a donc

$$y = 0^m{,}914 \quad \text{et} \quad x = 2^m{,}754,$$

et par suite

$$x + y \quad \text{ou} \quad CD = 3^m{,}668. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 188.)

189. $$R = 10^m,$$
$$\text{arc ABC} = 120^\circ,$$

surf. segment = AmCB = surf. sect. AOBC — surf. triangle AOC,

$$\text{surf. secteur AOCB} = \frac{\pi R^2}{3},$$

$$\text{surf. triangle AOC} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \times \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{surf. segment A}m\text{CB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}):$$

enfin

$$\text{surface demandée} = \frac{100}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

Effectuant, on trouve

$$S = 61^{mq},42^{dq}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 189.)

190. surf. ABCD = secteur AOB — secteur COB,

$$\text{sect. AOB} = \frac{\pi R^2 n}{366} = \frac{\pi \times \overline{7,5}^2 \times 222}{2160},$$

$$\text{sect. COB} = \cdots = \frac{\pi \times \overline{2,8}^2 \times 222}{2160},$$

$$\text{surf. ACBD} = \frac{\pi \times 222}{2160}\left(\overline{7,5}^2 - \overline{2,8}^2\right) = \frac{222\pi}{2160} \times 48,41.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971497 \\ \log 222 &= 2,3463530 \\ \log 48,41 &= 1,6849351 \\ -\log 2160 &= \bar{4},6655462 \\ \hline & 1,1939840 \end{aligned}$$

$$x = 15^{mq},6302. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 190.)

191. La surface S d'un cercle de rayon R est représentée par la formule $S = \pi R^2$.

Désignant par x le rayon demandé, on a par conséquent, dans la question présente,

$$x = \sqrt{\frac{35}{3,1416}} = 3^m,33\ldots. \quad (S.)$$

192. Soit x le nombre de secondes contenues dans cet arc.

L'aire du secteur est égale au produit de la longueur de son arc par la moitié du rayon.

La demi-circonférence contenant 648000 secondes a pour longueur 5π.

Donc un arc de 1″ a pour longueur $\frac{5\pi}{648000}$,

» x'' » $\frac{5\pi x}{648000}$.

ire du secteur vaudra ainsi

$$\frac{5\pi x}{648000} \times \frac{5}{2} = \frac{25\pi x}{1396000}.$$

193. On aura, d'après un théorème connu,

$$MA.MB = MC.MD;$$

ıne

$$MC.MD = 2,56 . 3,60;$$

ailleurs

$$MC + MD = CD = 8,64.$$

On est ainsi ramené à calculer deux nombres MC, MD, onnaissant leur somme $MC + MD = 8,64$ et leur produit $1C.MD = 9,216$.

Ces deux nombres sont les racines de l'équation

$$X^2 - 8,64X + 2,56 \times 3,60 = 0,$$

l'où

$$X = 4,32 \pm \sqrt{(4,32)^2 - 2,56 \times 3,6},$$

$$X = 4,32 \pm 3,0734863,$$

et par suite

$$MC = 7,3934863, \quad (S.)$$

$$MD = 1,2465137. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 193.)

194. Désignons par R le rayon inconnu du cercle, par $2x$ la base inférieure et par $2y$ la base supérieure. Les tangentes au cercle issues d'un point extérieur étant égales, on a $x + y$ pour la valeur commune des côtés AD et BC. D'après l'énoncé,

$$2x + 2y = 2a \quad \text{et} \quad \frac{AB + DC}{2} EF = b^2,$$

ou

$$x + y = a, \quad (x + y)2R = b^2.$$

Remplaçant, dans la seconde équation, $x + y$ par sa valeur a, il vient

$$2aR = b^2, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{b^2}{2a}.$$

D'autre part, les bissectrices OD et OA de deux angles supplémentaires sont perpendiculaires l'une sur l'autre, et par suite le

triangle AOD est rectangle. Dans ce triangle, on a

$$\overline{OH}^2 = HD \times HA, \quad \text{d'où} \quad R^2 = xy, \quad \text{d'où enfin} \quad xy = \frac{b^4}{4a^2}.$$

Connaissant la somme $x+y$ et le produit xy, on a x et y par l'équation du second degré

$$z^2 - az + \frac{b^4}{4a^2} = 0 \quad \text{ou} \quad 4a^2z^2 - 4a^3z + b^4 = 0,$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{2a^3 \pm \sqrt{4a^6 - 4a^2b^4}}{2 \times 4 \times a^2} = \frac{a^{3.2} \pm a\sqrt{a^4 - b^4}}{2a^2},$$

et enfin

$$AB = 2x = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{a},$$

$$DC = 2y = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}}{a};$$

d'ailleurs

$$AD = BC = x + y = a. \quad (S.)$$

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait $a^4 \geqslant b^4$. Si $a^4 = b^4$, $AB = DC = a$, le trapèze est un carré. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 194.)

195. Le triangle rectangle OAN donne

$$\overline{AN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OA}^2 = 896,$$

d'où

$$AN = \sqrt{896} = 29{,}93,$$

et par suite

$$MN = 2AN = 59^m{,}86. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 195.)

196. Appelant x le rayon demandé, on a

$$\pi x^2 = \pi(20^2 + 21^2),$$

d'où l'on tire très-facilement $x = 29$. (S.)

197. Considérons le trapèze OO'CC' formé par la distance des centres, les rayons et la portion cherchée de tangente. Menons par le centre O' de l'un des cercles la parallèle O'I à la tangente

commune; nous formerons ainsi un triangle rectangle OO'I, qui donne

$$IO' = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{OI}^2}.$$

Or

$$OO' = 8, \quad OI = OC - IC = 7 - 4 = 3,$$

d'où

$$IO' = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{(8+3)(8-3)} = \sqrt{11.3}.$$

On trouve

$$IO' = 7^m,416199. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 197.)

198. On a

$$AB \times (BC + AB) = AD' \times AD,$$

ou, en remplaçant AB par x et les autres quantités par leurs valeurs,

$$x(1+x) = 3 \times 7 \quad \text{ou bien} \quad x^2 + x - 21 = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 21}.$$

La solution positive est seule admissible, et l'on a

$$x' = 4^m,109. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 198.)

199. La question revient à trouver le côté a du triangle équilatéral ABC.

Le rayon du cercle inscrit dans un triangle quelconque est donné par la formule $R = \frac{s}{p}$, démontrée dans tous les cours de Géométrie et de Trigonométrie. Dans le cas actuel, on sait que

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{et que} \quad p = \frac{3a}{2}.$$

Il en résulte

$$R = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{3a} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad \text{d'où} \quad a = 2R\sqrt{3}.$$

Cette formule montre que le côté du triangle circonscrit est le double de celui du triangle inscrit, ce qu'il est, d'ailleurs, facile de reconnaître directement.

Cela posé, on a

$$AG = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

donc

$$AF = \frac{a\sqrt{3}}{2} - 2R = \frac{2R \times 3}{2} - 2R = R.$$

AF étant le tiers de AG, ED est aussi le tiers de BC, c'est-à-dire $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Par suite, la surface du trapèze BCDE a pour expression

$$\frac{BC + DE}{2} \times FG = \frac{2R\sqrt{3} + \frac{2R\sqrt{3}}{3}}{2} \times 2R = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3} \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 199.)

CHAPITRE V.

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

200. L'angle du polygone régulier de dix-sept côtés sera égal à

$$\frac{360^\circ}{17} = 21^\circ 10' 35'',3.$$

Il est évident qu'il ne peut y avoir deux côtés parallèles, car s'il y en avait deux, comme tout est symétrique, ils seraient parallèles deux à deux, ce qui ne peut avoir lieu que pour un polygone d'un nombre de côtés pair.

201. La surface de la salle est égale à

$$51^d \times 69^d,35 = 3536^{dq},85.$$

La surface d'un carreau est égale à

$$\tfrac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3},$$

puisque $a = 1^d$.

Divisons la surface de la salle par celle d'un carreau et forçons le quotient, nous aurons le nombre de carreaux nécessaires :

$$\frac{3536,85}{3\sqrt{3}} = 1362. \quad (S.)$$

202. Les triangles tels que AMN sont équilatéraux. En effet, ils sont isoscèles, puisque $AM = AN = a$ (en appelant a le côté de l'hexagone), et d'ailleurs l'angle $MAN = 60^\circ$, comme étant le supplément de l'angle de l'hexagone. Donc

$$MN = AN = NP,$$

et la figure MNPQR... a tous ses côtés égaux; elle a aussi ses angles égaux, car chacun d'eux est égal à $90^\circ + 60^\circ$. Donc la figure est un polygone régulier de douze côtés.

Sa surface se compose de celle de l'hexagone, de six fois la surface du triangle AMN, c'est-à-dire d'une seconde fois la surface de l'hexagone, et enfin de six fois le carré ayant a pour côté. On a donc

$$S = 2\left(\tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right) + 6a^2 = 6a^2\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right) = 3\left(\sqrt{3}+2\right)a^2.$$

Faisons

$$a = 1^m,$$
$$S = 11^{mq},196152. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 202.)

203. La surface S d'un hexagone régulier en fonction de son côté a est donnée par la formule

$$S = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}.$$

Faisons

$$a = 34^m,25,$$
$$S = 3047^{mq},6163. \quad (S.)$$

204. Soit ABCDE le pentagone régulier. Si l'on joint le sommet B au milieu de la diagonale AC, BP sera perpendiculaire sur AC, et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}AC = AB \sin ABP.$$

Mais $AB = 1$, l'angle $ABP = 54^\circ$; donc

$$AC = 2\sin 54^\circ = 1^m,618. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 204.)

205. Soit R le rayon cherché.

$$\text{surf. du cercle} = \pi R^2,$$
$$\text{surf. de l'hexagone} = \tfrac{3}{2}R^2\sqrt{3}.$$

On nous donne

$$R^2\left(\pi - \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\right) = 62^{mq},25;$$

donc

$$R = 10^m,702. \quad (S.)$$

206. J'appelle a le côté de l'hexagone, r le rayon du cercle inscrit et S la surface de celui-ci ; j'aurai

$$6a = 10^m,$$
$$r^2 = \tfrac{3}{4}a^2,$$
$$S = \pi r^2 = \pi \times \frac{3}{4} \times \frac{100}{36} = \frac{100\pi}{48} = 6^{mq},5450. \quad (S.)$$

207. La surface de l'octogone en fonction du rayon R du cercle inscrit est

$$2\sqrt{2} \times R^2;$$

celle de l'hexagone,

$$\tfrac{2}{3}R^2\sqrt{3}.$$

Nous avons donc

$$R^2\left(2\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 1^{mq},$$
$$R = 2^m,084. \quad (S.)$$

208. Appelons A le côté de l'hexagone, sa surface S sera donnée par la formule

$$S = \tfrac{3}{2}A^2\sqrt{3}.$$

Appelons a le côté du triangle, la surface S sera

$$s = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

On veut avoir $S = s$, ce qui donne

$$a = A\sqrt{3}\sqrt{2}.$$

Le côté du triangle cherché est donc la diagonale du carré qui aurait pour côté le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon A.

209. Les surfaces des octogones réguliers sont entre elles comme les carrés des côtés. Appelons S, S′, S″ les surfaces des trois octogones, C, C′, C″ les trois côtés, nous aurons

$$\frac{S}{C^2} = \frac{S'}{C'^2} = \frac{S''}{C''^2},$$

$$\frac{S + S'}{C^2 + C'^2} = \frac{S''}{C''^2}.$$

Maintenant nous savons que

$$C^2 = S\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = S\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$C'^2 = S'\frac{\sqrt{2}-1}{2};$$

d'ailleurs $S'' = S' + S = 95^{mq},63$; nous aurons donc

$$C''^2 = C^2 + C'^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(S'+S'') = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) = 95,63,$$

$$C'' = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)95,63} = 69^m,24. \quad (S.)$$

210. L'apothème OE du triangle ACB vaut la moitié du rayon OB. Or nous avons, dans le triangle rectangle OBE,

$$OE^2 = \overline{OB}^2 - BE^2, \quad \text{ou bien} \quad \frac{OB^2}{4} = OB^2 - 9^m,$$

d'où

$$\frac{3\overline{OB}^2}{4} = 9^m \quad \text{et} \quad OB = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12}.$$

Par suite, $OE = \frac{1}{2}\sqrt{12}$; le cercle circonscrit

$$\pi\overline{OB}^2 = 12\pi = 37^{mq},6991, \quad (S.)$$

le cercle inscrit

$$\pi\overline{OE}^2 = \frac{12\pi}{4} = 3\pi = 9^{mq},4248. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 210.)

211. La surface S du triangle équilatéral vaut, en désignant le rayon par R, $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. La surface S' du cercle vaut πR^2. On aura donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0,41. \quad (S.)$$

212. La surface demandée x est le tiers de la différence entre la surface du cercle et celle du triangle :

$$\text{cercle} = 64\pi, \quad \text{triangle} = \frac{3\times 64\times\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3};$$

$$\text{différence} = 64\pi - 48\sqrt{3} = 117^{mq},9234;$$

donc

$$x = 39^{mq},3078. \quad (S.)$$

213. On donne $A'B' = C$; il s'agit de calculer $AB = x$. Les triangles semblables AOB, A'OB' donnent $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OD}{OD'}$, ou, en appelant R le rayon du cercle et r l'apothème du décagone, $\frac{x}{C} = \frac{r}{R}$.

Calculons $OD = r$. Dans le triangle rectangle AOD, on a

$$\overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2 \quad \text{ou} \quad r^2 = R^2 - \overline{AD}^2;$$

mais AD égale la moitié du côté du décagone, c'est-à-dire qu'on a

$$AD = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{5}-1}{2.2}, \quad \text{d'où} \quad \overline{AD}^2 = \frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{16};$$

substituant dans la valeur de r^2, il vient

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{16} = \frac{16R^2 - 6R^2 + 2R^2\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{10R^2 + 2R^2\sqrt{5}}{16} = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16}$$

et

$$r = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

donc

$$\frac{x}{C} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4R}$$

et enfin

$$x = \frac{C\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 213.)

214. En appelant R le rayon du cercle, la surface du cercle vaut πR^2, celle du triangle $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Le rapport vaudra $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0,41$. (S.)

215. Le résultat de ce problème, facile à résoudre, est 105144 mètres carrés.

216. La formule qui, étant donné le côté OC d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, permet de calculer le côté C′ d'un polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés, est

$$C' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - C^2}}.$$

Faisons $y C = R\sqrt{2}$, côté du carré, il vient

$$C' = R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

le périmètre $x = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Ce produit doit être calculé à 0,001 près; il aura deux chiffres à sa partie entière : on doit donc l'obtenir avec cinq chiffres exacts. Il suffira évidemment de calculer $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ à moins de 0,00001, car l'erreur qui en résultera sera $< 0{,}00028 < 0{,}001$. On y parviendra en déterminant $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ avec une erreur relative $< \frac{1}{10^6}$. Pour cela il suffira de déterminer $2 - \sqrt{2}$ avec sept chiffres exacts, car son erreur relative sera ainsi $< \frac{1}{10^6}$ et celle de $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ qui en est la moitié sera $< \frac{1}{2 \times 10^6} < \frac{1}{10^6}$.

$$\left.\begin{aligned} 2 - \sqrt{2} &= 0{,}5857864 \\ \sqrt{2 - \sqrt{2}} &= 0{,}76536 \end{aligned}\right\} x = 21^m{,}430. \quad (S.)$$

217. Les surfaces des hexagones circonscrits et inscrits sont entre elles dans le rapport

$$\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{OF}^2} = \frac{R^2}{R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi l'hexagone circonscrit est les $\frac{4}{3}$ de l'hexagone inscrit; mais celui-ci est le double du triangle équilatéral inscrit, car il se compose de six triangles égaux à COB, tandis que le triangle

équilatéral ne contient que trois de ces triangles. Donc l'hexagone circonscrit est les $\frac{4}{3} \times 2$ ou les $\frac{8}{3}$ du triangle équilatéral.

Le rapport demandé est $\frac{8}{3}$. (S.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 217.)

218. *Première démonstration.* La droite BD est hauteur, bissectrice et médiane. Étant médiane, elle donne

$$OD = \frac{1}{2} OB \quad \text{ou} \quad r = \frac{R}{2}.$$

Deuxième démonstration. $OC = CE$; donc $OD = DE$, d'où $r = \frac{R}{2}$.

Troisième démonstration. $OM + ON + OD = BD$; de là

$$OM + ON = BO \quad \text{ou} \quad 2r = R.$$

Quatrième démonstration. $\frac{BD \times AC}{2} = pr$ ou $\frac{a}{2}(R + r) = \frac{1}{2} ar$ (a représentant le côté du triangle équilatéral). On tire de cette égalité

$$R + r = 3r \quad \text{et} \quad R = 2r.$$

Cinquième démonstration. $\frac{OM}{EC} = \frac{BO}{BE}$ ou $\frac{r}{R} = \frac{R}{2R}$, c'est-à-dire $r = \frac{R}{2}$.

Sixième démonstration. Joignons MD; le triangle MOD est semblable à BOA; or $MD = \frac{AB}{2}$; donc $OM = \frac{AO}{2}$ ou $r = \frac{R}{2}$.

Septième démonstration. $BE \times BD = \overline{BE}^2 - \overline{EC}^2$ ou

$$2R(R + r) = 3R^2, \quad \text{d'où} \quad R^2 = 2Rr \quad \text{et} \quad R = 2r.$$

Huitième démonstration. Menons par G la tangente GH; triangle GOH = triangle GBH, d'où $OG = BG$ ou $2r = R$.

Neuvième démonstration. Joignons MG; MGB est un triangle isoscèle, car $MBG = 30°$ et $BMG = \frac{MG}{2} = 30°$; donc $MG = BG$; d'ailleurs $MO = MG$; conséquemment $r = \frac{R}{2}$.

Dixième démonstration. Dans un triangle quelconque, si l'on

appelle d la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit, on a

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ici d s'annule; donc $R^2 - 2Rr = 0$, d'où $R = 2r$.

Onzième démonstration. $OD = OC \sin 30°$, c'est-à-dire $r = \frac{R}{2}$.

Douzième démonstration. $R^2 \sin AOB = ON \times AB$, $AB = \frac{R+r}{\sin 60°}$; ainsi $R^2 \sin 120° = r\frac{R+r}{\sin 60°}$, $R^2 \sin 120° \sin 60° - Rr - r^2 = 0$; ou $\frac{3}{4}R^2 - Rr - r^2 = 0$. Cette équation donne

$$R = \frac{r \pm \sqrt{4r^2}}{\frac{3}{2}} = 2r \quad (S.)$$

(la racine négative étant inacceptable), etc. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 218.)

219. Soit $AB = x$ le côté d'un triangle équilatéral. La hauteur CD a pour expression $\frac{x\sqrt{3}}{2}$, et par suite l'expression de la surface est $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Si donc m est le côté du carré donné, on aura l'équation

$$x^2\frac{\sqrt{3}}{4} = m^2,$$

que l'on peut écrire

$$x^2 = 4m \times \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

Le côté cherché est donc une moyenne proportionnelle entre $4m$ et $\frac{m}{\sqrt{3}}$. La quantité $\frac{m}{\sqrt{3}}$ se construit aisément; dans le triangle ABC, si $CD = m$, on a

$$\frac{AC}{2} = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 219.)

220. Soient $AB = a$, $AC = x$; on a

$$x^2 = CD \times CE = 2R \times CE;$$

mais

$$CE = CO - OE = R - OE = R - \sqrt{R^2 - \overline{AE}^2} = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}};$$

donc

$$x^2 = 2R\left(R - \tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}\right) \quad \text{et} \quad x = \sqrt{2R\left(R - \tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}\right)}.$$

Application. Si x est le côté de l'octogone régulier, a est le côté du carré, et pour $R = 1$ on aura $a = \sqrt{2}$, d'où

$$x = \sqrt{2\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - 2}\right)} = \sqrt{2\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}. \quad (S.)$$

Le périmètre de l'octogone est égal à $8x$, et l'on a

$$p = 8x = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \quad (S.)$$

On calculera p avec l'approximation que l'on voudra, car, pour avoir p à moins de $\frac{1}{10^n}$, il suffira de calculer $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ à moins de $\frac{1}{10^{n+1}}$, puisque $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ est multiplié par un nombre 8 moindre que 10.

Pour fixer les idées, supposons qu'on veuille avoir p à moins de 0,001; il faut calculer $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ à moins de 0,0001 ; on obtient ainsi 0,7653 par défaut et 0,7654 par excès; par suite, $p = 6,122$ par défaut et $p = 6,123$ par excès.

On pourrait aussi effectuer le calcul en introduisant le facteur 8 sous le radical. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 220.)

221. Soient AB le côté de l'hexagone régulier inscrit, AC le côté du dodécagone; on a

$$\text{surf.} = 12 \text{ triangle AOC};$$

or

$$\text{triangle AOC} = \tfrac{1}{2}\, OC \times AD = \tfrac{1}{2}\, OC \times \frac{AB}{2};$$

mais $OC = AB = R$; donc triangle $AOC = \frac{1}{2}\,\frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}$; donc

$$\text{surf.} = 12\,\frac{R^2}{4} = 3R^2. \quad (S.)$$

La surface du dodécagone régulier est donc égale à trois fois le carré du rayon du cercle circonscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 221.)

222. En appliquant les formules du Cours qui permettent de doubler le nombre des côtés d'un polygone inscrit dans un cercle donné, on trouve

$$\text{côté du dodécagone inscrit} = R\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\text{apothème du dodécagone} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\text{demi-périm. du dodécagone} = 6R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

En multipliant cette valeur par l'apothème, il vient

$$S = 3R^2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 3R^2\sqrt{4-3} = 3R^2.$$

D'ailleurs, en appelant S la surface du dodécagone circonscrit, on a

$$\frac{S}{s} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2} = \frac{R^2}{\frac{R^2}{4}(2+\sqrt{3})} = \frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{4-3} = 4(2-\sqrt{3}),$$

d'où

$$S = s \times 4(2-\sqrt{3})$$

et enfin

$$S = 12R^2(2-\sqrt{3}). \quad (S.)$$

(*Voy.* Atlas, *fig.* 222.)

223. 1° Par B menons une parallèle BF à la tangente DE et désignons par x l'angle FBA, qui est égal à l'angle cherché. Dans le triangle ABF on a

$$AF = AB \sin FBA \quad \text{ou} \quad 2a = 4a \sin x,$$

d'où

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = 30°.$$

2° surf. DCE = trapèze ABED — secteur ADC — secteur CBE; mais

$$\text{trapèze ABED} = \frac{BE+AD}{2}DE = \frac{a+3a}{2}BF;$$

or

$$BF = AB\cos FBA = 4a\cos 30 = 4a\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2a\sqrt{3};$$

donc

$$\text{trapèze ABED} = \frac{4a\,2a\sqrt{3}}{2} = 4a^2\sqrt{3}.$$

Les angles DAC, CBE sont respectivement égaux à 60 et 120 degrés. Par suite,

$$\text{secteur DAC} = \frac{\pi\overline{AD}^2}{6} = \frac{9\pi a^2}{6} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

et

$$\text{secteur CBE} = \frac{\pi\overline{BC}^2}{3} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

On a définitivement pour la surface demandée

$$\text{surf. DCE} = 4a^2\sqrt{3} - \frac{3a\pi^2}{2} - \frac{\pi a^2}{3}$$

$$= 4a^2\sqrt{3} - \frac{11\pi a^2}{6} = a^2\left(4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}\right). \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 223.)

224. Soient R le rayon d'un cercle ; a le côté d'un polygone régulier inscrit de n côtés ; x le côté d'un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés. La formule qui donne x en fonction de R et de a est (voir *Cours de Géométrie*)

$$(1) \qquad x = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Appliquons cette formule à la recherche du côté du dodécagone inscrit dans un cercle de rayon 1 ; a étant égal à 1, on obtient

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Dans la formule (1) faisons maintenant $a = a_{12}$; on obtient pour la valeur du côté du polygone régulier inscrit de vingt-quatre côtés

$$(2) \qquad a_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Soit b_{24} l'apothème du polygone régulier inscrit de vingt-quatre côtés ; on obtient facilement

$$(3) \qquad b_{24} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

Or la surface demandée est

$$S = \frac{24 a_{24} b_{24}}{2} = 12 a_{24} b_{24}$$

ou

$$S = 6\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$S = 6\sqrt{4 - (2 + \sqrt{3})} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Effectuant les calculs, on obtient

$$S = 6 \times 0{,}51 = 3^{\text{mc}}{,}06. \quad (S.)$$

CHAPITRE VI.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES SUR LES QUATRE PREMIERS LIVRES.

225. Soient XX′, YY′ les deux droites rectangulaires et M le milieu de AB. L'angle BOA, étant droit, est inscriptible dans une demi-circonférence; le centre de cette circonférence est le milieu M de AB. Par suite, MO est un rayon de ce cercle, de même que MB ou MA.

Le lieu des points M est donc la circonférence décrite du point O comme centre avec $\frac{1}{2}$AB pour rayon. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 225.)

226. Soient les droites AB, AC; on demande le lieu des points M tels que $\frac{MP}{MQ} = \frac{m}{n}$.

Joignons AM; prenons un point quelconque M′ de cette droite, et menons M′P′, M′Q′ perpendiculaires à AB et AC. Les triangles AMP, AM′P′ donnent

$$\frac{MP}{M'P'} = \frac{AM}{AM'}.$$

De même les triangles AMQ, AM′Q′ donnent

$$\frac{MQ}{M'Q'} = \frac{AM}{AM'};$$

donc

$$\frac{MP}{M'P'} = \frac{MQ}{M'Q'} \quad \text{ou bien} \quad \frac{MP}{MQ} = \frac{M'P'}{M'Q'} = \frac{m}{n}.$$

Le lieu cherché est donc la droite AM. Pour en construire un point, prenons AC = AB et abaissons BG perpendiculaire à AC;

divisons BG au point I, de telle sorte que $\frac{BI}{IG} = \frac{m}{n}$; menons IM parallèle à AC : le point M appartiendra au lieu, car nous aurons

$$MQ = IG \quad \text{et} \quad MP = BI.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 226.)

227. Prolongeons la droite CC′ jusqu'à la rencontre en I avec XY.

Les triangles BAB′, CAC′ sont semblables comme ayant les angles en A égaux et compris entre côtés proportionnels.

On en conclut l'égalité des angles ACI et ABB′ : donc ACI est supplémentaire de ABI; donc le quadrilatère ABIC est inscriptible, et les angles BAC, CIY sont égaux. Le lieu est donc une droite passant par un point quelconque jouissant de la propriété énoncée, et faisant avec XY l'angle constant BAC. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 227.)

228. Menons OM′ perpendiculaire à AB, et prenons sur cette ligne un point N′ tel que $OM' \times ON' = OM \times ON = a^2$; joignons NN′. Les triangles OMM′, ON′N seront semblables, car ils ont l'angle en O commun, et de l'égalité précédente on tire

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{OM'}{ON}.$$

Donc l'angle N′NO est droit, et le lieu cherché est la circonférence décrite sur ON′ comme diamètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 228.)

229. Le côté AB étant fixe, les extrémités des médianes égales à AD sont sur une circonférence décrite du point A comme centre avec AD pour rayon.

Par le troisième sommet C du triangle correspondant à la position AD de la médiane menons CE parallèle à AD jusqu'à sa rencontre avec AB prolongé; nous avons

$$DB = DC, \quad \text{donc} \quad EA = AB,$$

et par conséquent

$$CE = 2AD.$$

Le point E est fixe, de même que la longueur EC : le lieu demandé est donc la circonférence décrite du point E comme centre avec un rayon double de la médiane donnée. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 229.)

230. Soit à trouver le lieu des points n tels que

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2m^2.$$

Représentons la longueur AB par $2a$, et soit O son milieu; joignons MO, qui sera la médiane du triangle AMB; on sait que la médiane jouit de cette propriété que

$$2\overline{MO}^2 + 2\overline{AO}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2,$$

ou bien

$$2\overline{MO}^2 + 2a^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2m^2,$$

$$\overline{MO}^2 = m^2 - a^2.$$

Le lieu cherché est donc un cercle décrit du point O comme centre avec un rayon OM facile à construire. On voit qu'il n'y a de point satisfaisant à la condition donnée qu'autant que l'on a $m > a$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 230.)

231. Menons MP perpendiculaire à AB, et conservons les notations du problème précédent; nous aurons

$$\overline{MB}^2 = \overline{OM}^2 + a^2 + 2a.OP,$$

$$\overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 + a^2 - 2a.OP.$$

Retranchant ces égalités, on obtient

$$\overline{MB}^2 - \overline{MA}^2 = 4a.OP = 2m^2,$$

d'où

$$OP = \frac{m^2}{2a}.$$

La longueur OP est donc constante, et le lieu est la perpendiculaire à AB, menée à une distance OP de son milieu, facile à construire. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 231.)

232. Le quadrilatère BGMH sera inscriptible, les angles en G et en H étant droits; donc les angles BMH et BGH sont égaux, comme s'appuyant sur le même arc.

De même on voit dans le quadrilatère inscriptible MICH que HMC = HIC; donc

$$BMC = BGH + HIC;$$

or

$$BGH = 1^{dr} - HGM,$$

$$HIC = 1^{dr} - HIM;$$

donc

$$BMC = 2^{dr} - (HGM + HIM).$$

Mais les angles HMG, HMI sont égaux comme supplémentaires des angles égaux B et C; de plus, l'hypothèse $\overline{MH}^2 = MG \times MI$ peut s'écrire $\frac{MG}{MH} = \frac{MH}{MI}$.

Donc les triangles HGM, HMI sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; de leur similitude on conclut

$$\text{angle } HIM = \text{angle } GHM,$$

ce qui donne

$$BMC = 2^{dr} - (HGM + GHM).$$

Mais dans le triangle GMH on a

$$GMH = 2^{dr} - (HGM + GHM);$$

donc

$$BMC = GMH = 2^{dr} - B,$$

ce qui montre que l'angle BMC est constant. Le lieu est donc une circonférence ayant son centre sur la bissectrice de l'angle A. On obtiendra ce centre en élevant en B une perpendiculaire à AB. Le cercle décrit avec OB pour rayon donne en effet un segment capable de l'angle supplémentaire de B. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 232.)

233. Soit M un des points du lieu, de sorte qu'on a par hypothèse

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = K^2.$$

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle, C le rayon AO de ce cercle; P, Q, R les projections des trois sommets sur la ligne OM. Si nous considérons les triangles MAO, MBO, MCO, nous aurons

$$\overline{MA}^2 = \overline{MO}^2 + C^2 + 2MO.OP,$$
$$\overline{MB}^2 = \overline{MO}^2 + C^2 + 2MO.OQ,$$
$$\overline{MC}^2 = \overline{MO}^2 + C^2 + 2MO.OR.$$

Faisons la somme :

$$K^2 = \overline{3MO}^2 + \overline{3C}^2 + 2MO(OP + OR - OQ);$$

menons la ligne CO et prolongeons-la jusqu'à la rencontre du côté opposé en I; projetons le point I en H sur la ligne MO. Le point I est le milieu de AB : donc H est le milieu de PQ; d'ailleurs, le point O étant le point de rencontre des médianes du triangle, $OC = 2OI$.

Cela posé, les triangles semblables OIH, OCR donnent

$$\frac{OR}{OH} = \frac{OC}{OI} = 2, \quad OR = 2OH.$$

Mais l'égalité $PH = QH$ peut s'écrire :

$$QH = OH + OP,$$
$$QH + OH = 2OH + OP,$$
$$QO = OR + OP.$$

L'égalité que nous avons trouvée se réduit donc à

$$K^2 = 3MO^2 + 3C^2,$$

$$MO = \sqrt{\frac{K^2}{3} - C^2}.$$

Le lieu cherché est donc une circonférence décrite du point O comme centre, et dont le rayon se construirait d'après la valeur que nous venons de lui trouver. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 233.)

234. On donne AB, BC, CD et AC; on demande le lieu des milieux F, de la diagonale BD, et celui du milieu G de la droite EF, qui joint les milieux des diagonales.

1° Le triangle ABC est complétement déterminé. Joignons le point F au milieu I de BC; la ligne IF sera parallèle à CD et égale à la moitié de cette droite : le lieu des points F est donc une circonférence décrite du point I comme centre avec $\frac{1}{2}CD$ pour rayon.

2° Joignons le point G au milieu de EI; la ligne HG sera parallèle à IF et égale à la moitié de cette droite : le lieu des points G est donc une circonférence décrite du point H avec un quart de CD pour rayon. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 234.)

235. Le quadrilatère ABCD est inscriptible, les angles en B et D étant droits. Si nous abaissons DH perpendiculaire à AB, cette ligne viendra passer par le point E, où le cercle circonscrit

au quadrilatère coupe AX. En effet, l'angle DAC vaut $90° - 2\alpha$: donc l'angle BAD vaut $90° - \alpha$, et l'angle $ADK = \alpha$; or l'arc $AE = CB$, qui mesure le double de α.

Cela posé, menons EG perpendiculaire à AC, et joignons AE. Les triangles EAG, EGH sont égaux ; ils sont rectangles, ont le côté GE commun et les angles en E égaux à α, car l'angle $GED = IA'D$, et celui-ci, dans le triangle DAA', vaut α; d'autre part, l'arc AD vaut 4α : donc $AEG = \alpha$.

De l'égalité de ces triangles on conclut

$$AG = GH;$$

donc

$$GH = IE,$$

donc

$$AI = A'I.$$

Mais le triangle DAA' est isoscèle : donc

$$AD = AA' = 2AI;$$

donc le lieu est le cercle décrit du point A comme centre avec un rayon double de la distance des parallèles. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 235.)

236. Soient les longueurs AB, A'B'. Pour avoir un point du lieu, nous construirons sur ces deux longueurs des segments capables du même angle; leurs intersections en M et M' donnent deux points du lieu.

Soient O et O' les centres des cercles auxquels appartiennent ces segments, C et C' les milieux de AB et A'B', R et R' les rayons des deux cercles.

Les triangles OAC, O'A'C' sont semblables ; on a donc

$$\frac{R}{R'} = \frac{OC}{O'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \text{const.}$$

Si l'on joint OO' et qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de XY en G, les triangles semblables GOC, GO'C' donnent

$$\frac{CG}{C'G} = \frac{OC}{O'C'} = \text{const.}$$

Par suite, le point G reste fixe sur la droite XY; des mêmes triangles on déduit l'égalité

$$\frac{OG}{O'G} = \frac{OC}{O'C'} = \frac{R}{R'} = \text{const.}$$

Joignons MG, et soit K le point où cette ligne rencontre la circonférence O′; OM et O′K étant les rayons des deux cercles, on aura

$$\frac{OG}{O'G} = \frac{OM}{O'K}.$$

Il en résulte que les lignes OM et O′K sont parallèles, car, si elles ne l'étaient pas, on pourrait mener O′K′ parallèle à OM, et la ligne MK′ rencontrerait OO′ en un point G′ autre que G. Les triangles OMG′, O′K′G′ donneraient

$$\frac{OM}{O'K'} = \frac{OG'}{O'G'} = \frac{R}{R'}.$$

Comme on a déjà $\frac{OG}{O'G} = \frac{R}{R'}$, il s'ensuivrait $\frac{OG}{O'G} = \frac{OG'}{O'G'}$, ce qui ne peut avoir lieu si G et G′ ne se confondent pas. Ainsi les triangles GMO, GKO′ sont semblables; on a donc

$$\frac{GM}{GK} = \frac{GO}{GO'} = \frac{R}{R'} = \text{const.}$$

Mais on a, d'autre part, dans le cercle O′,

$$GM \times GK = GA' \times GB' = \text{const.}$$

Il s'ensuit que GM est une longueur constante. Le lieu est donc un cercle décrit du point G comme centre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 236.)

237. Par le point A on mène une parallèle à la direction OX et l'on prend $AM = a$; trouver le lieu des points M.

Prenons $OB = AM$; joignons AO, MB. La figure OAMB est un parallélogramme : donc $BM = OA$.

Le lieu est donc une circonférence égale à la première, ayant son centre sur OX à une distance de O égale à a. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 237.)

238. Soient les cercles O et O′, et M un point du lieu; menons des tangentes MA, MA′ aux cercles, et joignons MO, MO′ : les angles OMA, O′MA′ seront égaux, car chacun d'eux est la moitié de l'angle sous lequel on voit de M le cercle correspondant.

Menons OA, O'A', les triangles rectangles et semblables AOM, A'O'M donnent

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

Le lieu cherché est donc le lieu des points dont les distances aux points O et O' sont dans le rapport des rayons des cercles. On sait que ce lieu est une circonférence qui a son centre sur OO'. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 238.)

239. Joignons le point A au centre O du cercle donné; menons les rayons MO, NO, PO; soit $m = \frac{AM}{Ax}$ le rapport donné; menons XO' parallèle à MO : dans les triangles semblables AMO, AxO' on aura

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{Ax}{AM} \quad \text{ou} \quad AO' = \frac{AO}{m},$$

et de même

$$xO' = \frac{MO}{m},$$

ce qui prouve que les longueurs AO' et xO' sont constantes, quel que soit celui des points M, N, P, ... pour lequel on ferait cette construction. Le lieu cherché est donc la circonférence décrite du point O' comme centre avec un rayon égal à $\frac{MO}{m}$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 239.)

240. Soient le cercle O, le point A et une sécante quelconque AB, divisée au point M, de telle sorte que $\frac{AM}{AB} = \frac{m}{n}$. Il faut trouver le lieu des points M.

Joignons AO, OB, et menons MC parallèle à BO; nous aurons des triangles semblables ABO, AMC, qui donneront

$$\frac{AC}{AO} = \frac{AM}{AB} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{MC}{BO} = \frac{AM}{AB} = \frac{m}{n}.$$

Donc le point C restera fixe, quelle que soit la sécante considérée, et la longueur CM sera constamment égale à $BO \times \frac{m}{n}$.

Le lieu est donc la circonférence décrite du point C comme centre avec $BO \times \frac{m}{n}$ pour rayon. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 240.)

241. Soit le point C pris sur le prolongement de AB ; menons la tangente CT, la bissectrice de l'angle TCO et la perpendiculaire OM à cette bissectrice ; il faut trouver le lieu des points M.

Prolongeons OM jusqu'à la rencontre de la tangente en I ; menons MP perpendiculaire au diamètre.

Les triangles CMO, CMI sont égaux : donc $MO = MI$. Les triangles MPO, OTI sont semblables, car ils sont rectangles et ont les angles PMO, TOI égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Nous en concluons

$$\frac{MP}{OT} = \frac{MO}{OI} = \frac{1}{2},$$

$$MP = \tfrac{1}{2} OT.$$

OT est constant ; donc le point M est à une distance constante de AB. Le lieu est donc la parallèle à AB menée à une distance égale à la moitié du rayon du cercle donné. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 241.)

242. Si je mène le diamètre OM du cercle donné et que je joigne MA, le triangle MAO sera rectangle en A. Si je prolonge MO et qu'en A′ j'élève M′A′ perpendiculaire à OA′, les triangles rectangles OA′M′, OAM sont égaux ; donc $OM' = OM$.

En répétant le même raisonnement pour les points B′, C′, D′, ..., on voit qu'ils sont tous sur la circonférence décrite sur OM′ comme diamètre.

Les deux cercles, ayant même diamètre, ont même surface. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 242.)

243. Soit P le point de rencontre des cordes ; joignons ce point au centre du cercle et menons les rayons OC, OC′ perpendiculaires aux cordes. On sait que ces lignes la partagent en deux parties égales : le lieu demandé est donc celui des points C.

Les angles OCP, OC′P, ... sont droits ; donc le lieu est la circonférence décrite sur OP comme diamètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 243.)

244. Menons la droite AO qui passe par le centre, et prenons le point N′ de telle sorte que $AM' \times AN' = a^2$; on a

$$AM' \times AN' = AM \times AN,$$
$$\frac{AN'}{AM} = \frac{AN}{AM'}.$$

Donc, si nous joignons MM′, NN′, nous aurons des triangles AMM′, ANN′ semblables ; le premier est rectangle en M, donc le second l'est en N′.

Le lieu cherché est donc la perpendiculaire au diamètre passant par le point A, menée à une distance donnée par la relation $AM' \times AN = a^2$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 244.)

245. Joignons PA, PC, PB. Dans le quadrilatère inscriptible, l'angle CPB est le supplément de l'angle CDB; or CDO, comme extérieur au triangle CBD, est égal à CBD + DCB. Cette somme ayant même mesure que CPB, j'en conclus

(1) $$CDO = CPB.$$

D'autre part, dans le quadrilatère inscriptible ACPE, les angles AEC, APC sont égaux comme ayant même mesure ; donc

(2) $$AEC = ACP.$$

Ajoutons (1) et (2),

$$CDO + AEC = CPB + APC = APB.$$

Le premier membre vaut 1 degré; donc l'angle APB est aussi droit, et le lieu demandé est la circonférence décrite sur AB comme diamètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 245.)

246. Soient les circonférences O et O′, et M un point tel que $\overline{MT}^2 + MT'^2 = 2m^2$; joignons MO, MO′, OT, O′T′; les triangles rectangles MTO, MT′O′ donnent

$$\overline{MT}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{MO}^2 - R^2,$$
$$\overline{MT'}^2 = \overline{MO'}^2 - \overline{O'T'}^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2,$$
$$\overline{MT}^2 + \overline{MT'}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MO'}^2 - (R^2 + R'^2).$$

Le premier membre vaut $2m^2$; nous aurons donc

$$\overline{MO}^2 + \overline{MO'}^2 = 2m^2 + (R^2 + R'^2).$$

Le lieu cherché est donc celui des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés soit constante. Nous avons vu que ce lieu est un cercle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 246.)

247. Soit le point M tel, que $\overline{MT}^2 - \overline{MT'}^2 = 2m^2$; nous avons, dans les triangles rectangles,

$$\overline{MT}^2 = \overline{MO}^2 - R^2,$$
$$\overline{MT'}^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2,$$
$$\overline{MT}^2 - \overline{MT'}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 - R^2 + R'^2,$$
$$2m^2 = \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 - R^2 + R'^2,$$
$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = 2m^2 + R^2 - R'^2 = \text{const.}$$

Le lieu cherché est donc celui des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes soit constante. Nous savons que ce lieu est une droite perpendiculaire à OO'. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 247.)

248. Soient le cercle O, le diamètre AB, la sécante BC; nous prenons CD = CB; nous joignons DO, CA : trouver le lieu des points de rencontre M.

Joignons AD; dans le triangle DAB, AC est perpendiculaire sur le milieu du côté BD; c'est une médiane, puisque BC = CD. DO est une autre médiane; donc $CM = \frac{1}{3}CA$.

Menons MI parallèle à CB ; la longueur $BI = \frac{1}{3}BA$; comme, d'ailleurs, l'angle IMA est droit, il s'ensuit que le lieu cherché est la circonférence décrite sur les deux tiers du diamètre AB comme diamètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 248.)

249. Soient le cercle O, le diamètre fixe AB, un rayon variable OC; on mène CD, on prend OM = CD. Trouver le lieu des points M.

Élevons OE perpendiculaire à AB et joignons EM.

Les triangles EOM, COD sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux : donc l'angle EMO est droit; donc le lieu est la circonférence décrite sur EO comme diamètre. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 249.)

250. Soit le point A pris dans le plan de O ; menons la sé-

cante ABC, les tangentes en C et B. Trouver le lieu des points de rencontre D.

Menons DP perpendiculaire à AO, et joignons DO ; le point I sera le milieu de BC. Les triangles ODP, OAI seront semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; on aura donc

$$\frac{PO}{OI} = \frac{DO}{AO} \quad \text{ou} \quad PO = \frac{DO \times OI}{AO}.$$

Mais $PO = AO - AP$; donc, en tirant la valeur de AP, on a

$$AP = AO - \frac{DO \times OI}{AO}.$$

Le triangle DBO est rectangle, et BI est perpendiculaire sur l'hypoténuse; on aura donc

$$\overline{OB}^2 = DO \times OI;$$

donc

$$AP = AO - \frac{\overline{OB}^2}{AO}.$$

La longueur AP est donc constante, et le lieu cherché est la ligne DP perpendiculaire sur AO. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 250.)

251. Soient les cercles tangents O et O'. Par le point de contact on mène AB et AB', de telle sorte que $\frac{AB}{AB'} = \frac{m}{n}$; on abaisse des perpendiculaires à AB et AB'; trouver le lieu des points de rencontre M.

Joignons MA; nous aurons deux triangles MOA, MO'A qui auront même hauteur et seront entre eux comme leurs bases OA et OA' :

$$\frac{\text{triangle OMA}}{\text{triangle O'MA}} = \frac{OA}{O'A} = \frac{R}{r}.$$

Si l'on considère ces triangles comme ayant pour bases OM et O'M, et pour hauteurs AI et AI', nous aurons

$$\frac{\text{triangle OMA}}{\text{triangle O'MA}} = \frac{OM \times AI}{O'M \times AI'} = \frac{OM \times \frac{AB}{2}}{O'M \times \frac{AB'}{2}} = \frac{OM}{O'M} \times \frac{m}{n}.$$

Rapprochant les deux égalités, on en déduit

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{R}{r} \times \frac{n}{m}.$$

On est ramené à chercher le lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné, lieu que nous savons être un cercle ayant son centre sur OO'. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 251.)

252. Soient A et B les points où la ligne des centres rencontre le centre O, A'B' ceux où elle rencontre le centre O'.

Pour construire le point P, en O' j'élève une perpendiculaire OO'' et je décris le cercle O''A'B' égal au cercle O; je joins OO''; j'élève au milieu I une perpendiculaire IP ; l'intersection de cette ligne avec OO' sera le point P. En effet, menons les tangentes PS, PS', PS'' aux trois cercles; nous aurons

$$PS = PS''.$$

Mais dans les cercles O' et O'' nous avons

$$\overline{PS''}^2 = PA' \times PB',$$

$$\overline{PS'}^2 = PA' \times PB';$$

donc

$$PS' = PS'' = PS.$$

Élevons maintenant par le point P une perpendiculaire MN à OO'; je dis que, pour tout point Q de cette ligne, les tangentes QT, QT' menées aux circonférences O et O' seront égales. Joignons QB, QB'; soient C et C' les points où ces droites coupent les circonférences. Les triangles rectangles semblables PQB, ACB donnent

$$\frac{AB}{BQ} = \frac{BC}{BP},$$

$$AB \times BP = BC \times BQ.$$

Dans cette égalité, remplaçons AB et BC par BP — AP et QB — QC; elle devient

$$\overline{BP}^2 - AP \times BP = \overline{BQ}^2 - BQ \times CQ,$$

$$BQ \times CQ = \overline{BQ}^2 - \overline{BP}^2 + AP \times BP.$$

De même les triangles QPB′ et CA′B′ conduiront à la relation

$$B'Q \times C'Q = \overline{B'Q}^2 - \overline{B'P}^2 + A'P \times B'P.$$

Les tangentes PS et PS′ étant égales,

$$AP \times BQ = A'P \times B'P.$$

D'ailleurs, dans les triangles QPB, QB′P, on a

$$\overline{BQ}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{QP}^2 = \overline{B'Q}^2 - \overline{B'P}^2;$$

donc enfin

$$BQ \times CQ = B'Q \times C'Q,$$

et comme $QB \times QC = QT$, $QB' \times QC' = QT'$,

$$QT = QT'.$$ C. Q. F. D.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 252.)

CHAPITRE VII.

PROBLÈMES SUR LE CINQUIÈME LIVRE.

DROITES ET PLANS.

253. Si les trois droites sont situées dans le même plan, il faut que le plus grand angle formé par deux d'entre elles soit égal à la somme des angles formés par la ligne intermédiaire avec les deux autres. Cette condition est nécessaire, et d'ailleurs suffisante. Voyons donc si cela a lieu dans le cas précédent :

$$137^\circ < 110^\circ + 113^\circ.$$

Donc les trois droites ne sont pas dans le même plan.

254. Les trois lignes AB, BC, AC forment un triangle rectangle dans lequel on a

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{800^2 + 850^2} = 1167^m,26. \quad (S.)$$

255. Les lignes PO, OM, MP forment un triangle rectangle qui donne

$$\overline{MP}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OM}^2;$$

d'ailleurs MP, MN et NP forment un autre triangle rectangle dans lequel

$$\overline{NP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{PO}^2 + \overline{OM}^2,$$

$$NP = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{PO}^2 + \overline{OM}^2} = \sqrt{17^2 + 13^2 + 24^2} = 32^m,155. \quad (S.)$$

256. Imaginons par le point M un plan parallèle au plan ABCD. Je dis qu'il contiendra la droite MN tout entière. En effet, s'il ne

la contenait pas, on pourrait toujours faire passer un plan par la droite AB et le point M, lequel viendrait couper le plan que nous avons mené, suivant une droite MR parallèle à AB. On aurait donc, passant par le point M, deux parallèles MN et MR à AB, ce qui est impossible.

Le plan parallèle à ABCD, mené par le point M, contient donc la droite MN. Contenant le point N, on démontrerait de même qu'il contient MP, et ainsi de suite. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 256.)

256 *bis*. Soit une droite AB inclinée sur le plan M. L'angle α que forme la droite avec sa projection BC sur le plan est le plan petit parmi tous les angles qu'elle forme avec les droites passant par son pied dans le plan. (Voir, pour la démonstration, un traité de Géométrie, V^e livre.)

Si donc nous plaçons la droite BD sur BC, et si nous la faisons tourner autour de B dans le plan M, l'angle ABD va croître depuis α jusqu'à $180 - \alpha$, valeur qu'il atteindra lorsque BD sera sur le prolongement de BC, pour décroître ensuite depuis $180 - \alpha$ jusqu'à α. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 256 *bis*.)

CHAPITRE VIII.

PROBLÈMES SUR LE SIXIÈME LIVRE.

POLYÈDRES.

257. Les angles dièdres SA, SB, SC seront droits; nous allons le démontrer par le dièdre SC. Les angles plans CSA, CSB étant droits, SA et SB sont perpendiculaires sur SC.

L'angle plan ASB mesure donc le dièdre SC; cet angle est droit: donc le dièdre l'est aussi.

Une pyramide a pour mesure le produit de la base par le tiers de la hauteur; soit ASB la base, celle-ci aura pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{SA} \times \mathrm{SB} = \tfrac{1}{2}\,ab.$$

La hauteur correspondante est SC. Le volume de la pyramide a donc pour expression

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{2}\,ab \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{C} = \tfrac{1}{6}\,abc. \quad (\mathrm{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 257.)

258. Le volume du tronc de pyramide est égal à la somme des volumes de trois pyramides ayant même hauteur H et ayant respectivement pour bases la base supérieure du tronc, sa base inférieure et une moyenne proportionnelle entre les deux bases. Or la surface d'un hexagone régulier de côté a est $\mathrm{S} = \frac{3}{2}\,a^2\sqrt{3}$, ce qui donne pour le volume du tronc, en remplaçant a par 2, puis par 1,

$$12 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \times \mathrm{H}\,(1 + 4 + 2),$$

d'où

$$H = \frac{24}{21\sqrt{3}} = \frac{8}{7\sqrt{3}} = 1^{m},97945. \quad (S.)$$

259. Soient V le volume, B et H la base inférieure et la hauteur, B' la base supérieure inconnue; nous savons qu'on a

$$V = \tfrac{1}{3} H (B + B' + \sqrt{BB'}),$$

d'où l'on tire, pour la valeur B',

$$B' = 3\frac{V}{H} - \tfrac{1}{2} B \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} B \left(6\frac{V}{H} - \tfrac{3}{2} B\right)}.$$

Si nous remplaçons les lettres par leurs valeurs, nous obtenons pour B' les deux valeurs

$$B'_1 = 2^{mq},5151,$$
$$B'_2 = 22^{mq},9617.$$

La deuxième est une solution étrangère introduite par l'élévation au carré du radical $\sqrt{BB'}$; nous avons donc

$$B' = 2^{mq},5151. \quad (S.)$$

260. Soient V et v les volumes des deux pyramides, H et h leurs hauteurs, nous savons que

$$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3},$$

$$\frac{V - v}{v} = \frac{H^3 - h^3}{h^3}.$$

On veut donc que $\frac{H^3 - h^3}{h^3} = 8$, ce qui donne

$$H^3 - 9h^3 = 0.$$

Si nous posons $\sqrt[3]{9} = m$, l'équation précédente peut s'écrire

$$H^3 - h^3 m^3 = 0,$$

ou bien

$$(H - mh)(H^2 + mHh + m^2h^2) = 0,$$

équation qui se dédouble en deux autres

(1) $$H - mh = 0,$$

(2) $$H^2 + mhH + m^2h^2 = 0.$$

Les solutions de l'équation (2) sont imaginaires; nous n'avons donc à nous occuper que de l'équation (1), qui donne pour $H - h$, inconnue de la question,

$$H - h = \sqrt[3]{\frac{9-1}{\sqrt[3]{9}}}\,H = 0{,}519248\,H. \quad (S.)$$

261. On prend par hypothèse

$$Cc = x,$$
$$Aa = x + 50,$$
$$Bb = x + 120.$$

Désignons par H la hauteur du prisme, par B sa base. Le prisme tronqué inférieur est égal en volume à trois pyramides ayant pour base B et pour hauteurs x, $x + 50$, $x + 120$.

De même, le prisme tronqué supérieur équivaudra à la somme de trois pyramides ayant pour base B et pour hauteurs

$$H - x,$$
$$H - (x + 50),$$
$$H - (x + 120).$$

On aura donc l'équation de condition

$$\tfrac{1}{3}B(x + x + 50 + x + 120)$$
$$= \tfrac{1}{3}B[H - x + H - (x + 50) + H - (x + 120)],$$
$$3x + 170 = 3H - 3x - 170,$$
$$x = 19187^{m},833. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 261.)

262. Les polygones semblables, comme sont ceux qu'on obtient par les sections parallèles dans une pyramide, ont le même rapport que les carrés des côtés homologues; donc

$$\frac{mnpqr}{ABCDE} = \frac{10^2}{15^2},$$

d'où

$$mnpqr = ABCDE \times \frac{10^2}{15^2},$$

$$mnpqr = 375 \times \frac{10^2}{15^2} = 122^{mq},22. \quad (S.)$$

263. Soient V et v les volumes des pyramides; nous aurons

$$\frac{V}{v} = \frac{1}{10} = \frac{\overline{Sa}^3}{\overline{SA}^3},$$

donc

$$Sa = SA\sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

Remplaçant SA par sa valeur,

$$Sa = 11^m,436. \quad (S.)$$

264. Le volume d'un parallélépipède V étant égal au produi de sa base B par sa hauteur H, nous aurons

$$H = \frac{V}{B} = \frac{188}{533} = 0^m,353. \quad (S.)$$

265. Soient S le sommet de la pyramide et K le centre de la base,

surf. latérale S = 6 fois triangle SAB,

surf. de la base S = 6 fois triangle KAB,

$$\frac{S}{s} = \frac{\text{triangle SAB}}{\text{triangle KAB}} = \frac{SI}{IK} = \frac{\sqrt{IK^2 + h^2}}{IK}.$$

On veut que le rapport soit égal à 10; d'ailleurs

$$IK = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3};$$

nous aurons donc pour déterminer la relation

$$10 = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 = h^2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}},$$

$$h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{33} = 25^m,850. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 263.)

266. Le volume de ce tronc de pyramide sera

$$\frac{67,5}{3}(\overline{1,83}^2 + \overline{0,75}^2 + 1,83 \times 0,75) = 118^{mc},887750;$$

son poids sera donc en kilogrammes

$$118887,750 \times 2,57 = 305541^{kg},5175. \quad (S.)$$

267. On a, d'après un théorème connu,

$$\frac{\overline{Sa}^3}{\overline{SA}^3} = \frac{Sabc}{SABC} = \frac{1}{10},$$

d'où

$$\frac{\overline{Sa}^3}{24,638} = \frac{1}{10},$$

$$Sa = \sqrt[3]{\frac{2,4638^3}{10}} = 11,433. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 267.)

268. Désignons par P la pyramide totale SABC, et par p la pyramide $Sabc$; H et h étant les hauteurs respectives de ces deux solides, on aura

(1) $$\frac{P}{p} = \frac{H^3}{h^3};$$

mais l'énoncé donne

$$p = \tfrac{1}{7}(P - p).$$

d'où

(2) $$\frac{P}{p} = 8 = 2^3.$$

Les équations (1) et (2) fournissent ainsi

$$H = 2h. \quad (S.)$$

c'est-à-dire que le plan sécant doit être mené à moitié de la hauteur.

269. On a

$$\frac{\overline{Sa}^3}{\overline{SA}^3} = \frac{Sabc}{SABC} = \frac{1}{10} = \frac{100}{10^3},$$

d'où

$$Sa = \frac{SA\sqrt[3]{100}}{10} = \frac{24.638 \times \sqrt[3]{100}}{10} = 2,4638 \times \sqrt[3]{100},$$

$$\log 2,4638 = 0,3916055,$$

$$+\log\sqrt[3]{100} = 0,6666666$$

$$\log Sa = 1,0582721,$$

d'où

$$Sa = 11^m,435. \quad (S.)$$

270. On a

$$V = \tfrac{1}{3} b \times h.$$

La base $b =$ ABC est un triangle équilatéral dont le côté est a; la surface est donc

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Soit SD la hauteur h du tétraèdre régulier. Le triangle rectangle SDA donne

$$\overline{SA}^2 = \overline{SD}^2 + \overline{AD}^2;$$

AD est le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC ; donc

$$AD = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

il en résulte

$$a^2 = \overline{SD}^2 + \frac{a^2}{3},$$

d'où

$$\overline{SD}^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}.$$

Il en résulte

$$SD \text{ ou } h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et par conséquent

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 270.)

271. Posons AB $= a$, BC $= b$, A'B' $= a'$, B'C' $= b'$, E'G $= d$. Menons le plan diagonal A'B'CD; nous décomposons le solide en deux troncs de prisme A'B'ABCD et A'B'D'C'DC. Le premier a pour mesure le produit de sa section droite E'EF par le tiers de la somme $2a + a'$ de ses arêtes latérales. Mais cette section E'EF a pour base EF $= b$ et pour hauteur E'G $= d$. Sa surface vaut donc $\frac{bd}{2}$, et le premier volume considéré a pour expression

$$\frac{bd}{2} \times \frac{2a + a'}{3} = \frac{bd}{6}(2a + a').$$

Le deuxième tronc de prisme a pour mesure

$$E'F'F \times \frac{2a'+a}{3} = \frac{b'd}{2} \times \frac{2a'+a}{3},$$

ou enfin

$$\frac{b'd}{6}(2a'+a);$$

donc le volume total s'écrira

$$(1) \qquad V = \frac{d}{6}[b(2a+a') + b'(2a'+a)].$$

Si les arêtes AA', BB', CC', DD' allaient concourir en un même point S, les rectangles ABCD, A'B'C'D' seraient semblables et donneraient les rapports

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Je dis que cette proportionnalité s'obtiendrait directement en égalant le volume obtenu en (1) au volume

$$\frac{d}{3}(ab + a'b' + \sqrt{ab \,.\, a'b'}),$$

qui représente le solide considéré comme un tronc de pyramide rectangulaire. Posons en effet

$$\frac{d}{3}(ab + a'b' + \sqrt{ab \,.\, a'b'}) = \frac{d}{6}(2ab + a'b + 2a'b' + ab');$$

il vient, après simplification,

$$2\sqrt{ab \,.\, a'b'} = a'b + ab'.$$

Élevant au carré et réduisant

$$2aba'b' = \overline{a'b}^2 + \overline{ab'}^2,$$

d'où

$$\overline{a'b}^2 - 2ab \,.\, a'b' + ab'^2 = (a'b - ab')^2 = 0.$$

On en déduit

$$a'b - ab' = 0,$$

d'où

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 271.)

272. Chaque face a son centre à l'intersection de ses diagonales. Donc les quatre points ORMQ sont situés dans un même plan qui passe par les milieux G, H, ... des arêtes du parallélépipède. De même les sommets RPM déterminent un plan qui passe par les milieux K des arêtes verticales, et enfin le plan OPQ passe par le milieu D de l'arête AB. Le solide ODBG CPRM est donc un nouveau parallélépipède dont les arêtes sont respectivement égales à la moitié de celles du parallélépipède donné. Son volume vaut donc $\frac{abc}{8}$, et celui de la pyramide OPCM vaut six fois moins, puisqu'elle a pour base PCM, moitié de PCMK, et pour hauteur OC, qui est la hauteur du petit parallélépipède $\frac{abc}{8}$. On a donc

$$\text{vol. OCPM} = \frac{abc}{8 \times 6}.$$

Mais l'octaèdre se compose de huit fois la pyramide OCPM. Donc

$$\text{vol. octaèdre} = \frac{abc}{6}.$$

Menons maintenant CE perpendiculaire sur PM et joignons OE; cette droite OE est la hauteur du triangle OPM, et l'on a

$$(1) \qquad \text{surf. OPM} = \tfrac{1}{2} \times \text{PM} \times \text{OE};$$

or

$$\text{PM} = \sqrt{\overline{\text{PK}}^2 + \overline{\text{KM}}^2} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}.$$

Pour avoir OE on écrira

$$\overline{\text{OE}}^2 = \overline{\text{OC}}^2 + \overline{\text{CE}}^2;$$

mais

$$\text{CE} = \frac{\text{CP} \times \text{CM}}{\text{PM}} = \frac{ac}{2\sqrt{a^2 + c^2}};$$

donc

$$\text{OE}^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4(a^2 + c^2)} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4(a^2 + c^2)},$$

d'où

$$\text{OE} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2\sqrt{a^2 + c^2}},$$

et par suite

$$(1) \qquad \text{surf. OPM} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}\,\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{2\sqrt{a^2c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{8}.$$

L'octaèdre ayant huit faces égales à OPM, on a enfin

$$\text{surf. octaèdre} = \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 272.)

273. 1° *Volume du tétraèdre.* Soit SH la hauteur du tétraèdre. On a

$$V = \frac{ABC \times SH}{3}.$$

Les arêtes SA, SB, SC étant égales doivent s'écarter également du pied H de la perpendiculaire SH. Il en résulte que H est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC; ou bien encore H est le centre de gravité du triangle, c'est-à-dire le point de concours de ses médianes.

$$\overline{SH}^2 = \overline{SB}^2 - \overline{HB}^2;$$

mais

$$SB = a \quad \text{et} \quad HB = \tfrac{2}{3}BD = \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

il vient donc

$$\overline{SH}^2 = a^2 - \frac{3a^2}{3} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \quad \text{et} \quad SH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

d'autre part,

$$ABC = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2.2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

substituant, on a pour le volume V

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

2° *Rayon du cercle inscrit.* Joignons SD, et soit E le centre de gravité de la face SAC. Les droites BE et SH se coupent au

point I. Les triangles semblables DEH, DSB donnent

$$\frac{EH}{SB} = \frac{DH}{DB} = \frac{1}{3}.$$

On a aussi par les triangles IEH, SIB

$$\frac{EH}{SB} = \frac{HI}{SI},$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$\frac{HI}{SI} = \frac{1}{3}.$$

Les quatre hauteurs des tétraèdres qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées se coupent dans le rapport $\frac{1}{3}$ à partir des faces. I est le centre de la sphère inscrite et IH est le rayon. D'après ce qui précède,

$$IH = \frac{SH}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 273.)

274. Désignons respectivement par a et h les lignes données SA et SO. Soient x et z les longueurs inconnues IO et SC. On doit avoir

$$2\pi CI \times IO = \pi CI \times SC,$$

ou

(1) $$2x = z.$$

Mais les triangles semblables SCI, SAO nous donnent

$$\frac{SC}{SA} = \frac{SI}{SO},$$

ou

(2) $$\frac{z}{a} = \frac{h-x}{h}.$$

Remplaçant dans l'équation (1) l'inconnue z par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$2x = \frac{a(h-x)}{h}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{h-x} = \frac{a}{2h}.$$

Composant les rapports, lorsqu'on a une proportion telle que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, on a aussi

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}, \qquad \frac{x}{x+h-x}=\frac{a}{a+2h},$$

d'où enfin

$$x=\frac{ah}{a+2h}.$$

Remarque. — x étant une quatrième proportionnelle entre a, h et $a+2h$, se construit facilement sur la figure même. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 274.)

275. La base ABC de la pyramide a pour surface

$$(1) \qquad \text{ABC}=\frac{\text{BC}\times\text{AM}}{2}=\frac{a\times a\sqrt{3}}{2\times 2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

d'ailleurs la pyramide étant régulière, la hauteur SO a son pied au point de concours des trois médianes du triangle de base ABC. On a donc

$$\text{OM}=\frac{\text{AM}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Enfin, si l'on joint SM, on a

$$\overline{\text{SM}}^2=\overline{\text{SO}}^2+\overline{\text{OM}}^2=4a^2+\frac{3a^2}{36}=\frac{49a^2}{12},$$

d'où

$$\text{SM}=\frac{7a\sqrt{3}}{6}.$$

Mais la surface du triangle SBC est

$$\frac{\text{SM}\times\text{BC}}{2}=\frac{7a\sqrt{3}}{6}+\frac{a}{2}=\frac{7a^2\sqrt{3}}{12},$$

et, en triplant cette valeur, on a la surface latérale de la pyramide SABC

$$(2) \qquad \text{S}=\frac{7a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Si nous comparons cette expression à la valeur (1) qui donne

la base B de la pyramide, il est aisé d'en conclure qu'on a

$$\frac{S}{B} = 7.$$

Appelons donc S et B la surface latérale et la base de la pyramide supérieure SDEF, qui est semblable à la pyramide donnée; on aura

$$\frac{S}{B} = \frac{s}{b} = \frac{S - s}{B - b} = 7.$$

Mais $S - s$ est la surface latérale du tronc de pyramide, et l'énoncé du problème porte que $S - s = b$. Le rapport qui précède peut donc s'écrire

$$\frac{b}{B - b} = 7,$$

ou

$$\frac{b}{B - b + b} = \frac{7}{1 + 7},$$

ou

$$\frac{b}{B} = \frac{7}{8}.$$

Or, les bases des deux pyramides sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues ou comme les carrés des hauteurs. On a donc

$$\frac{b}{B} = \frac{\overline{SK}^2}{\overline{SO}^2} = \frac{7}{8},$$

d'où

$$\overline{SK}^2 = \frac{\overline{SO}^2 \times 7}{8} = \frac{4a^2 \times 7}{8} = \frac{7a^2}{2},$$

d'où

$$SK = a\sqrt{\frac{7}{2}};$$

dès lors la distance x demandée s'écrira

$$x = 2a - a\sqrt{\frac{7}{2}} = a\left(2 - \sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 275.)

275 *bis*. vol. SABC $= \frac{ABC \times SH}{3}$. Or

$$ABC = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2.2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad SH = \sqrt{\overline{SD}^2 - \overline{HD}^2};$$

mais

$$SD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \; HD = \frac{AD}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

d'où

$$\overline{SD}^2 = \frac{3a^2}{4} \; \overline{HD}^2 = \frac{3a^2}{36} = \frac{a^2}{12};$$

donc

$$SH = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{9a^2 - a^2}{12}} = \sqrt{\frac{8a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Substituant, il vient

$$\text{vol. SABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\;4} \times \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 275 *bis.*)

CHAPITRE IX.

PROBLÈME SUR LE SEPTIÈME LIVRE.

276. Soient les quatre points ABCD non situés dans un même plan; soit E le centre de la circonférence déterminée par les trois points ADC, et F le centre de la circonférence ABC. La perpendiculaire EG élevée en E au plan ADC est le lieu des points également distants de A, D, C. De même la perpendiculaire FH au plan ABC est le lieu des points également distants de A, B, C. Je dis que ces deux perpendiculaires se rencontrent. En effet, menons FK, EK perpendiculaires à l'intersection AC des deux plans considérés, elles passent par le milieu K de AC : donc elles déterminent un plan FKE perpendiculaire à AC et par suite aux plans ABC et ADC; donc ce plan FKE contient FH et EG. Or ces droites ne peuvent être parallèles, car si elles l'étaient, les deux plans ABC, ADC se confondraient, et les quatre points donnés seraient dans un même plan, ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi, FH et EG sont dans un même plan et ne sont pas parallèles; donc elles se coupent en un point O, centre de la sphère. Ce point O étant unique, il n'y a qu'une sphère qui puisse passer par les quatre points considérés. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 276.)

CHAPITRE X.

PROBLÈMES SUR LE HUITIÈME LIVRE.

1° PROBLÈMES SUR LE CYLINDRE ET LE CONE.

277. L'expression du volume V du cylindre de rayon R et de hauteur H est

$$V = \pi R^2 H.$$

Ici l'on suppose $V = 1$, et $H = 2R$; nous aurons donc

$$1 = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3,$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}};$$

soit en décimètres, puisque nous prenons V en litres, c'est-à-dire en décimètres cubes.

278. Appelons R et r les rayons des bases du tronc de cône, h sa hauteur, a son apothème. Si nous menons AE parallèle à la hauteur par le point A, nous aurons

$$a = R + r, \qquad a^2 = h^2 + (R - r)^2.$$

Éliminant a, nous obtenons

$$h^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr,$$

$$\sqrt{Rr} = \tfrac{1}{2} h.$$

En second lieu, la surface totale S a pour expression

$$S = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi (R + r) a$$
$$= \pi [R^2 + r^2 + (R + r)^2 = 2\pi (R^2 + r^2) + Rr],$$

et comme

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr),$$

on voit qu'en effet on a

$$V = S \times \tfrac{1}{3} h.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 278.)

279. Appelons H la hauteur du cône, R le rayon de la base, l la longueur de la génératrice, S la surface latérale, enfin V le volume; nous aurons les relations suivantes :

(1) $$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H,$$

(2) $$l = \sqrt{R^2 + H^2},$$

(3) $$S = \pi R l.$$

Éliminant entre ces équations l et H, il nous vient

$$S = \pi R \sqrt{R^2 + \frac{9V^2}{R^4}},$$

et, en remplaçant R et V par leurs valeurs,

$$S = 3^{mq},2970. \quad (S.)$$

280. La surface latérale du tronc de cône S est, en appelant R et r les rayons des bases et l l'apothème,

$$S = \pi(R + r)l;$$

mais, si h est la hauteur du tronc,

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2};$$

nous aurons donc

$$S = \pi(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}.$$

Dans cette expression, remplaçons les lettres par les nombres :

$$S = 125^{mq},66. \quad (S.)$$

281. La formule que nous emploierons est celle que nous venons de donner

$$S = \pi(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2};$$

ici

$$\frac{R}{r} = \frac{12}{13};$$

donc

$$r = 1,6,$$

et, substituant aux autres lettres les valeurs numériques,

$$S = 34^{mq},223333. \quad (S.)$$

282. Appelons x le rayon, nous devrons avoir

$$20^{mc} = \pi x^2 h = \pi \times 5,25 \times x^2.$$

$$x = \sqrt{\frac{20}{5,25\pi}} = 1^m,105. \quad (S.)$$

283. Soient V le volume, H la hauteur, R et r les deux rayons, nous aurons

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr);$$

nous en tirons

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{\frac{1}{\pi H}(12V - 3\pi R^2 H)}}{2}.$$

Substituant aux lettres leurs valeurs, on trouve, tout calcul fait, en rejetant la valeur négative, qui ne peut avoir d'interprétation,

$$r = 13^m,957. \quad (S.)$$

284. Appelons B la base cherchée; le volume de la sphère est

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3;$$

le volume du cône de hauteur $\frac{1}{2}$R sera

$$\tfrac{1}{3}B \times \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{6}BR;$$

nous aurons donc

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{6}BR, \quad \text{d'où} \quad B = 8\pi R^2.$$

La base du cône doit donc être égale à huit fois le grand cercle de la sphère, c'est-à-dire que le rayon de cette base doit être double de la diagonale du carré qui aurait pour côté le rayon de la sphère.

285. Soient H la hauteur du cylindre, x le rayon de sa base, R le rayon du cercle, dont la surface est égale à la surface totale du cylindre, nous aurons

$$2\pi x^2 + 2\pi x H = \pi R^2,$$

$$x = -\frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{R^2}{2}}.$$

La valeur négative est à rejeter. Remplaçant dans la deuxième valeur les lettres par les nombres, nous obtenons

$$x = 1^{m},40. \quad (S.)$$

286. Appelons x le diamètre inconnu du cylindre, R et r les rayons des bases des troncs de cône, nous devrons avoir

$$\tfrac{1}{4}\pi x^2 h = \tfrac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr),$$
$$x^2 = \tfrac{4}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$x^2 = \tfrac{4}{3}(0,4^2 + 0,22^2 + 0,4 \times 0,22),$$
$$x = 0^{m},314. \quad (S.)$$

287. Appelons R le rayon de la sphère, son volume sera $\frac{4}{3}\pi R^3$; appelons h, r et x la hauteur et les rayons des bases du tronc, son volume sera $\frac{1}{3}\pi h (r^2 + x^2 + rx)$; on veut avoir

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{3}\pi h (r^2 + x^2 + rx),$$

d'où, en remplaçant les lettres par les valeurs numériques données,

$$2x^2 + 14x - 27 = 0, \quad x = 1^{m},57, \quad (S.)$$

la valeur négative étant nécessairement à rejeter.

288. La surface latérale S du cylindre de rayon R et de hauteur H est

$$S = 2\pi RH.$$

En appelant e l'épaisseur de la couche d'or que nous pouvons supposer, à cause de sa petitesse, appliquée sur le cylindre développé, le volume d'or employé sera

$$2\pi RH\, e = 1^{cc},$$

$$e = \frac{1}{2\pi RH} = \frac{2}{3000\pi} = 0^{mm},1061. \quad (S.)$$

289. Appelons R et r les rayons des bases du tronc de cône, H sa hauteur, a son apothème, V son volume et S sa surface latérale, on a

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr),$$
$$S = \pi (R + r)\, a,$$
$$a^2 = (R - r)^2 + H^2,$$

d'où nous tirons

$$\frac{V}{S}=\frac{1}{3}\frac{H(R^2+r^2+Rr)}{(R+r)\sqrt{H^2+(R-r)^2}}=3,7573. \quad (S.)$$

290. Soient h la hauteur du cône, h', h'' les distances des plans sécants au sommet, les volumes des cônes semblables seront entre eux comme les cubes de leurs hauteurs; nous devrons donc avoir

$$h'^3=\tfrac{1}{3}h^3,$$
$$h''^3=\tfrac{2}{3}h^3,$$

et puisque $h=82^m$,

$$h'=56^m,855, \quad (S.)$$
$$h''=71^m,633. \quad (S.)$$

291. Soient R et R' les rayons des bases du tronc de cône, H sa hauteur, on aura

$$\tfrac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')=\tfrac{1}{2}\pi R^2H;$$

appelons K le rapport $\frac{R}{R'}$, l'équation qui donnera K sera

$$K^2+K-\tfrac{1}{2}=0,$$
$$K=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=0^m,368. \quad (S.)$$

292. Soient R et R' les rayons des bases des cylindres; leurs surfaces latérales seront

$$2\pi RH \quad \text{et} \quad 2\pi R'H';$$

la surface de la sphère de rayon A est d'ailleurs $4\pi A^2$. On aura donc en premier lieu

$$2\pi RH+2\pi R'H'=4\pi A^2,$$

ou bien

(1) $$RH+R'H'=2A^2.$$

Il faut que la somme des volumes des cylindres soit un minimum; cette somme est

$$\pi R^2H+\pi R'^2H';$$

posons donc

(2) $$R^2H+R'^2H'=m.$$

Éliminant R′ entre les équations (1) et (2), nous aurons

$$R = \frac{4A^2H \pm \sqrt{4m(H^2H' + HH'^2) - 16A^4HH'}}{2(H^2 + HH')}.$$

Pour que le radical ne devienne pas imaginaire, la plus petite valeur que puisse prendre m est

$$m = \frac{4A^4}{H + H'}.$$

C'est donc le minimum de

$$R^2H + R'^2H'.$$

On obtient pour les valeurs de R et de R′

$$R = \frac{2A^2}{H + H'} = R'.$$

Les rayons des bases des cylindres doivent donc être égaux. (S.)

293. Soit V le volume du tronc, S sa surface, x le nombre à trouver, on aura $x = \frac{V}{S}$. D'ailleurs on sait que

$$V = \frac{\pi \times 4,3}{3}(7,\overline{25}^2 + 9,\overline{48}^2 + 7,25 \times 9,48),$$

$$S = \pi(7,25 + 9,48) \times BD.$$

Or, dans le triangle BD, on a

$$BD = \sqrt{4,\overline{3}^2 + (9,48 - 7,25)^2},$$

donc

$$S = \pi(7,25 + 9,48)\sqrt{4,\overline{3}^2 + 2,\overline{23}^2},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{V}{S}3,7. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 293.)

294. Soit H la hauteur du cône, et soient R et r les rayons de ses deux bases. Je pose $\frac{R}{r} = x$, d'où $r = Rx$. Le volume du cylindre sera

$$\pi R^2H;$$

celui du cône sera

$$\frac{\pi H}{3}(R^2 + R^2x^2 + R^2x) = \frac{\pi R^2 H}{3}(x^2 + x + 1).$$

On aura donc l'équation

$$\frac{2\pi R^2 H}{3}(x^2 + x + 1) = \pi R^2 H,$$

ou bien

$$2x^2 + 2x + 2 = 3,$$

ou enfin

$$2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

En rejetant la valeur négative, on voit que le rapport des rayons est

$$\frac{r}{R} = \frac{-1\sqrt{3}}{2} = 0{,}366. \quad (S.)$$

295. En appelant x le côté du tronc de cône, on a

$$34{,}54 = \pi x(1{,}42 + 0{,}64),$$

d'où

$$x = \frac{34{,}54}{\pi \times 2{,}06} = 5^m{,}34;$$

or on a

$$BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{x^2 - (1{,}42 - 0{,}64)^2},$$

d'où

$$\text{hauteur} = \sqrt{\overline{5{,}34}^2 - \overline{0{,}78}^2} = 5^m{,}29. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 295.)

296. Soient MN et PQ les traces des deux plans sécants sur un plan SAB mené par l'axe du cône. Les cônes SNM, SQP, SAB seront semblables et seront entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues; d'ailleurs ils sont, d'après les données, proportionnels aux nombres 1, 2 et 3. On aura donc

$$\frac{SNM}{SAB} = \frac{1}{3} = \frac{SD^3}{SC^3}, \quad \text{d'où} \quad SD = 82\sqrt[3]{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{SQP}{SAB} = \frac{2}{3} = \frac{SE^3}{SC^3}, \quad \text{d'où} \quad SE = 82\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

On tire de là

$$SD = 56^m,855, \quad (S.)$$
$$SE = 71^m,633. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 296.)

297. Imaginons le cône coupé par un plan passant par son axe, suivant le triangle SAB; soient FQ et RS les traces des plans demandés.

Désignons SM par x, SN par y, SE par h.

Si je désigne par a la surface du cône SAB, celle du cône SPQ vaudra $\frac{a}{3}$, et celle du cône SRS vaudra $\frac{2a}{3}$. Or ces trois cônes étant semblables, leurs surfaces sont proportionnelles aux carrés des hauteurs. On aura donc

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

Pour construire x et y, je partage la hauteur SE en trois parties égales SC, CD et DE. Sur SE comme diamètre je décris une demi-circonférence, j'élève CF et DG perpendiculaires sur SE; je joins SF, FE, SG, GE. Les deux triangles rectangles SFE et SGE donnent

$$\frac{SF^2}{SE^2} = \frac{SF^2}{h^2} = \frac{SC}{SE} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{SG^2}{SE^2} = \frac{SG^2}{h^2} = \frac{SD}{SE} = \frac{2}{3}.$$

On en conclut donc

$$SF = x, \quad SG = y.$$

On aura donc les points M et N en prenant

$$SM = SF, \quad SN = SG.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 297.)

298. La figure étant symétrique par rapport au diamètre GK, il suffit d'exprimer que le cylindre CDNM égale le segment CAD. Mais, en désignant ID par y, on a, pour le volume du cylindre CDNM,

$$\pi y^2 (R - x),$$

et, pour le volume du segment CAD,

$$\frac{\pi y^2 x}{2} + \frac{\pi x^3}{6};$$

donc, d'après l'énoncé,

$$\pi y^2 (R - x) = \frac{\pi y^2 x}{2} + \frac{\pi x^3}{6};$$

mais

$$y^2 = x(2R - x);$$

substituant, il vient

$$x(2R - x)(R - x) = \frac{x^2(2R - x)}{2} + \frac{x^3}{6};$$

chassant les dénominateurs et supprimant la solution $x = 0$,

$$6(2R - x)(R - x) = 3x(2R - x) + x^2,$$

ou, toutes réductions faites,

$$2x^2 - 6Rx + 3R^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 6R^2}}{2} = \frac{3R \pm R\sqrt{3}}{2}. \quad (S.)$$

Le signe + ne peut convenir, car x ne peut dépasser R et *à fortiori* 2R. La seule solution est

$$x = \frac{R(3 - \sqrt{3})}{2}.$$

Il serait facile de construire cette valeur. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 298.)

299. $V = \pi R^2 H = \pi \times \overline{0,150}^2 \times 2,5 = 176^{dc},625$, (S.)

$P = VD = 206^{kg},651$. (S.)

300. Soient H la hauteur du cône, R et r les rayons de ses deux bases; je pose $\frac{r}{R} = x$, d'où $r = Rx$.

Le volume du cylindre sera $\pi R^2 H$.

Celui du cône sera

$$\frac{\pi H}{3}(R^2 + R^2x^2 + R^2x) = \frac{\pi R^2 H}{3}(x^2 + x + 1).$$

On aura donc l'équation

$$\frac{2\pi R^2 H}{3}(x^2+x+1)=\pi R^2 H,$$

ou bien

$$2x^2+2x+2=3, \quad \text{ou enfin} \quad 2x^2+2x-1=0,$$

d'où

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},$$

et, en rejetant la solution négative, on voit que le rapport demandé est

$$\frac{r}{R}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=0{,}366. \quad (S.)$$

301. La figure représente une section faite dans la sphère et le cône par un plan conduit suivant l'axe du cône. Appelons x la hauteur du cône et S sa surface latérale ; on a

$$S=\pi\times CB\times OB,$$

$$CB=\sqrt{1-x^2}, \quad OB=1, \quad \text{donc} \quad S=\sqrt{1-x^2}.$$

De là l'équation

$$\pi\sqrt{1-x^2}=0{,}4\pi.$$

Élevant au carré, il vient

$$1-x^2=0{,}16, \quad \text{d'où} \quad x=\sqrt{0{,}84}=0^m{,}916. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 301.)

302. Le volume de la tour est évidemment la différence entre les volumes de deux cylindres de hauteur commune x et de rayons R et r ; on a donc

$$V=\pi R^2 x-\pi r^2 x,$$
$$=\pi x(R^2-r^2)=\pi x(R-r)(R+r).$$

Ici

$$V=94{,}9677, \quad R-r=0{,}5, \quad r=1{,}3,$$

d'où

$$R=1{,}8 \quad \text{et} \quad R+r=3{,}1.$$

On a donc

$$x=\frac{94{,}9677}{\pi\times 0{,}5\times 3{,}1}.$$

Les tables de logarithmes donnent

$$x = 19^{m},503. \quad (S.)$$

303. Appelons a l'arête du cône donné, et R', a' et x le rayon de base, l'arête et la hauteur du petit cône SCD.

La surface latérale du cône donné a pour expression $\pi R a$.

La surface totale du cône détaché par le plan CFD a d'ailleurs pour valeur le produit $\pi R'(a' + R')$. On a donc l'égalité

$$(1) \qquad \pi R'(a' + R') = \pi R a.$$

Mais de la similitude des triangles SFD, SEB on tire

$$\frac{x}{h} = \frac{R'}{R} = \frac{a'}{a}, \quad \text{d'où} \quad R' = \frac{Rx}{h} \quad \text{et} \quad a' = \frac{ax}{h};$$

l'équation devient alors

$$\frac{\pi R x}{h}\left(\frac{ax + Rx}{h}\right) = \pi R a \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{h^2} = \frac{a}{a + R}.$$

Multiplions les deux termes du second membre par $a - R$, il viendra

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{a(a - R)}{a^2 - R^2}.$$

Mais dans le triangle rectangle SEB on a

$$h^2 = a^2 - R^2,$$

d'où enfin

$$(2) \qquad x^2 = a(a - R).$$

x est alors une moyenne proportionnelle entre a et $a - R$, et il est facile de construire cette longueur, connaissant R et h.

Construisons, en effet, le triangle rectangle SEA avec h et R pour côtés de l'angle droit; l'hypoténuse SA est égale à a. Rabattons la longueur AE = R sur SA par un arc de cercle décrit du point A comme centre avec AE pour rayon; la longueur SI sera égale à $a - R$. Si alors on décrit sur SA comme diamètre une demi-circonférence, et qu'au point I on élève une perpendiculaire à SA jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence en L, on obtiendra la longueur x en joignant SL. En effet, le triangle SLA étant rectangle en A, on a

$$\overline{SL}^2 = SA \times SI = a(a - R).$$

Rabattant alors la longueur SL sur SE en SF, le point F sera le point par lequel il faudra faire passer le plan pour satisfaire aux conditions de l'énoncé. Pour avoir x en fonctions de h et de R seulement, il suffit de remplacer, dans l'équation (2), a par sa valeur $\sqrt{h^2+R^2}$. Il vient ainsi

$$x^2 = \sqrt{h^2+R^2}\left(\sqrt{h^2+R^2}\right) - R.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 303 et 303 *bis*.)

304. Soient R et r les rayons cherchés.

La surface latérale du tronc est $\pi(R+r)a$.

Les surfaces des deux bases sont πR^2 et πr^2.

La surface totale du tronc sera donc

$$\pi[a(R+r)+R^2+r^2].$$

La surface de la sphère ayant pour diamètre a est πa^2.

On aura donc

$$\pi[a(R+r)+R^2+r^2] = \pi a^2,$$

ou

$$(1) \qquad R^2+r^2+(R+r)a = a^2.$$

D'ailleurs, si l'on abaisse CH perpendiculaire sur AB, on aura

$$(2) \qquad AH = R - r = a\cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

Les équations (1) et (2) déterminent R et r. On tire, en effet, de l'équation (2)

$$r = R - \frac{a}{2},$$

et, en reportant dans l'équation (1), il vient

$$R^2 + \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(R + R - \frac{a}{2}\right)a = a^2,$$

ce qui donne

$$2R^2 - aR + \frac{a^2}{4} + 2aR - \frac{a^2}{2} = a^2,$$

ou

$$2R^2 + aR - \frac{5a^2}{4} = 0, \quad \text{ou} \quad 8R^2 + 4aR - 5a^2 = 0;$$

on en tire

$$R = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 40a^2}}{8}$$

$$= \frac{-2a \pm 2\sqrt{11a^2}}{8} = \tfrac{1}{4}(-a \pm a\sqrt{11});$$

il en résulte

$$r = R - \frac{a}{2} = \tfrac{1}{4}(-3a \pm a\sqrt{11}).$$

Il faut rejeter les valeurs négatives qui ne conviennent pas à la question, et il vient, en définitive,

$$R = \frac{a}{4}(\sqrt{11} - 1) \quad (S.) \quad \text{et} \quad r = \frac{a}{4}(\sqrt{11} - 3). \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 304.)

305. La surface latérale d'un tronc de cône a pour valeur la demi-somme des circonférences de ses bases multipliée par le côté du tronc. La surface totale s'obtiendra en ajoutant à la surface latérale les surfaces des deux bases. On a donc

$$S = \pi(R + r) \times DB + \pi R^2 + \pi r^2,$$

et comme

$$DB^2 = \sqrt{\overline{DG}^2 + \overline{GB}^2} = \sqrt{\overline{DG}^2 + (R - r)^2} = \sqrt{h^2 + (R - r)^2},$$

$$S = \pi\left[(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2} + R^2 + r^2\right].$$

Or on a

$$R = 2, \qquad r = 1, \qquad h = 1;$$

donc

$$S = \pi(3\sqrt{1 + 1} + 4 + 1) = \pi \times (3\sqrt{2} + 5),$$

$$\sqrt{2} = 1,41421, \quad 3\sqrt{2} = 4,24263, \quad 3\sqrt{2} + 5 = 9,24263;$$

$$\pi = 3,1416; \quad \text{donc} \quad S = 3,1416 \times 9,24263,$$

$S = 29^{mc},0365$, à $0^{mc},0001$ près par défaut. (S.)

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 305.)

306. On doit avoir

$$\tfrac{1}{3}\pi h(x^2 + r^2 + rx) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h,$$

ou bien

$$2x^2 + 2r^2 + 2rx = 3r^2,$$

$$2x^2 + 2rx - r^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 2r^2}}{2} = r \times \left(\frac{\pm\sqrt{3} - 1}{2}\right).$$

Adoptant la première valeur de x, il vient, pour le rapport cherché,

$$\frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1,732 - 1}{2} = 0,366. \quad (S.)$$

307. On a, pour la surface latérale et le volume demandés,

$$S = \pi \times AB \times SA, \qquad V = \tfrac{1}{3}\pi \times \overline{AB}^2 \times SB.$$

Les deux triangles semblables SDC et ACE donnent

$$\frac{SD}{CE} = \frac{CD}{AE} \quad \text{ou bien} \quad \frac{SD}{2} = \frac{3,5}{7,3 - 3,5},$$

d'où

$$SD = \frac{7}{3,8} = 1,8421.$$

Donc

$$SB = SD + DB = 13,8421.$$

Le triangle rectangle ASB donne

$$SA = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{SB}^2} = 8,25.$$

On a, par conséquent,

$$S = \pi \times 7,3 \times 8,25 = 189^{mq},2028, \qquad (S.)$$
$$V = \tfrac{1}{3}\pi \times 7,3^2 \times 3,8421 = 214^{mc},409497. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 307.)

308. On sait que le volume du tronc de cône aura pour expression, si nous appelons y le rayon de la base supérieure et $h - x$ sa hauteur,

$$\tfrac{1}{3}\pi(h - x)(R^2 + Ry + y^2).$$

D'autre part, le volume de la sphère dont le diamètre serait x est $\frac{1}{6}\pi x^3$, et par suite le double de ce volume $\frac{1}{3}\pi x^3$.

L'équation du problème est donc

$$(1) \qquad \tfrac{1}{3}\pi(h - x)(R^2 + Ry + y^2) = \tfrac{1}{3}\pi x^3,$$

ou, en simplifiant,

$$(h - x)(R^2 + Ry + y^2) = x^3.$$

Pour éliminer y, écrivons le rapport que dônnent les triangles semblables ABC et ADO,

$$\frac{y}{R} = \frac{x}{h}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{Rx}{h}.$$

En reportant cette valeur de y dans l'équation (1), il vient, si l'on remarque que R^2 est facteur commun,

$$R^2(h-x)\left(1+\frac{x^2}{h^2}+\frac{x}{h}\right) = x^3,$$

ou, en chassant le dénominateur h^2,

$$R^2(h-x)(h^2+hx+x^2) = h^2x^3.$$

Mais la deuxième parenthèse du premier membre n'est autre chose que le quotient effectué de $h^3 - x^3$ par $h - x$. L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$R^2(h-x) \times \frac{h^3-x^3}{h-x} = h^2x^3, \quad \text{d'où} \quad R^2(h^3-x^3) = h^2x^3,$$

et, après réduction,

$$R^2h^3 = (h^2+R^2)x^3;$$

on tire de là

$$x^3 = \frac{R^2h^3}{h^2+R^2},$$

d'où enfin

$$x = h\sqrt[3]{\frac{R^2}{R^2+h^2}}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 308.)

309. R étant le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre régulier, joignons son centre aux quatre sommets. Nous formerons ainsi quatre pyramides égales ayant pour hauteur commune le rayon de la sphère donnée et pour bases respectives les faces du tétraèdre. Il en résulte que

$$V = 4(ABC \times \tfrac{1}{3}R) = 4\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{R}{3}\right),$$

ou

$$V = x^2\sqrt{3} \cdot \frac{R}{3};$$

or le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête est donné par la formule $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; on a donc

$$\frac{x^3\sqrt{2}}{12} = x^2\sqrt{3}\cdot\frac{R}{3}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

La surface totale du tétraèdre est égale à quatre fois l'aire d'un triangle équilatéral ayant pour côté x; donc

$$S = 4\left(\frac{4R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{16R^2\times 3}{2}\sqrt{3} = 8R^2.3\sqrt{3} = 24R^2\sqrt{3}. \text{ (S.)}$$

Le volume

$$V = \left(\frac{4R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{3}\frac{R}{3} = \frac{16R^2\times 3}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{R}{3} = 8R^3\sqrt{3}. \text{ (S.)}$$

Il faut remarquer que $V = S\times\frac{1}{3}R$.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 309.)

310. Soient R le rayon AO, x la distance SC, y la longueur SD, r le rayon DC, et a l'arête SA.

L'équation du problème devient, si l'on remarque que la surface totale du cône SDE et la surface totale du tronc de cône ont une partie commune qui est le cercle de diamètre DE,

$$\pi vy = \pi R^2 + \pi(R + r)(a - y),$$

ou, en supprimant π,

$$(1) \qquad vy = R^2 + (R + v)(a - y).$$

Mais les triangles semblables SDC, SAO donnent

$$\frac{r}{R} = \frac{y}{a}, \quad \text{d'où} \quad \frac{ry}{Ra} = \frac{r^2}{R^2}$$

et

$$(2) \qquad ry = \frac{r^2 a}{R}.$$

Pareillement on a

$$\frac{a}{y} = \frac{R}{r}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a - y}{a} = \frac{R - r}{R}$$

et

$$(3) \qquad a - y = \frac{a(R - r)}{R},$$

et, si l'on reporte dans l'équation (1) les valeurs de ry et $a - y$ données dans les équations (2) et (3), il vient

$$\frac{r^2 a}{R} = R^2 + (R + r) \times \frac{a(R - r)}{R},$$

et, après réduction,

$$r^2 a = R^3 + aR^2 - ar^2,$$

ou enfin

$$(4) \qquad r^2 = \frac{R^2(R + a)}{2a}.$$

Pour avoir maintenant la valeur de a, nous observons que l'on a

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{\overline{SO}^2}{R^2} = \frac{a^2 - R^2}{R^2}, \quad \text{d'où} \quad x^2 = r^2 \times \frac{a^2 - R^2}{R^2},$$

ou, si l'on remplace r^2 par sa valeur tirée de l'équation (4),

$$x^2 = \frac{R^2(a + R)(a^2 - R^2)}{2aR^2} = \frac{(a + R)^2(a - R)}{2a},$$

d'où

$$x = (R + a)\sqrt{\frac{a - R}{2a}}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 310.)

311. La surface totale du cône a pour expression

$$\pi \times BA \times SB + \pi \overline{BA}^2 = \pi BA(SB + BA);$$

d'autre part, le double de la surface de la sphère dont le rayon est R s'exprime par $8\pi R^2$. On doit démontrer que

$$(1) \qquad BA(SB + BA) = 8R^2.$$

Or, les triangles semblables SCO, SBA donnent

$$\frac{SB}{BA} = \frac{SO}{CO} = \frac{3R}{R} = 3,$$

d'où

$$SB = 3BA.$$

Ainsi l'égalité (1) à vérifier devient

$$(2) \qquad 4\overline{BA}^2 = 8R^2 \quad \text{ou} \quad \overline{BA}^2 = 2R^2;$$

mais le triangle rectangle SBA donne

$$\overline{SB}^2 - \overline{BA}^2 = \overline{SA}^2,$$

ou

$$9\overline{BA}^2 - \overline{BA}^2 = 16R^2,$$

ou, après réduction,

$$\overline{BA}^2 = 2R^2,$$

égalité conforme à l'égalité (2), ce qui vérifie bien l'énoncé. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 311.)

312. La surface totale du cône SCE a pour expression

$$\pi \times CA \times SC + \pi\overline{CA}^2;$$

d'autre part, la surface de la sphère donnée étant $4\pi R^2$, on a

$$\frac{CA \times SC + \overline{CA}^2}{4R^2} = m.$$

Mais les triangles semblables SDO, SCA donnent

$$\frac{CA}{OD} = \frac{SA}{SD},$$

d'où

(1) $$CA = \frac{SA \times OD}{SD}.$$

D'ailleurs

$$\overline{SD}^2 = SA \times SB,$$

ou, si l'on appelle x la distance SB,

$$\overline{SD}^2 = (x + 2R)x;$$

donc l'égalité (1) devient, si l'on élève au carré ses deux membres,

$$\overline{CA}^2 \frac{(x + 2R)^2 \times R^2}{(x + 2R)x} = \frac{R^2(2R + x)}{x},$$

d'où

(2) $$CA = R\sqrt{\frac{2R + x}{x}}.$$

Calculons pareillement SC; les mêmes triangles semblables SDO, SCA donnent

$$\frac{SC}{SO} = \frac{CA}{DO}, \quad \text{d'où} \quad SC = CA \times \frac{SO}{DO} = CA \times \frac{x + R}{R},$$

et, en remplaçant CA par la valeur (2) que l'on vient d'obtenir,

$$(3) \qquad SC = (x + R)\sqrt{\frac{2R + x}{x}}.$$

Cela posé, remarquons que l'équation du problème peut s'écrire

$$CA\,(SC + CA) = 4mR^2,$$

d'où

$$R\sqrt{\frac{2R + x}{x}}\left[(x + R)\sqrt{\frac{2R + x}{x}} + R\sqrt{\frac{2R + x}{x}}\right] = 4mR^2,$$

et, si l'on observe qu'on a entre crochets le facteur commun $\sqrt{\frac{2R + x}{x}}$, il vient, après réduction,

$$\frac{(2R + x)^2}{x} = 4mR^2,$$

d'où

$$(4) \qquad x^2 - 4R(m - 1)x + 4R^2 = 0.$$

Résolvant,

$$x = 2R(m - 1) \pm \sqrt{4R^2(m - 1)^2 - 4R^2},$$

et, après simplification,

$$x = 2R\left(m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 2m}\right).$$

Les deux racines sont positives, puisque dans l'équation (4) le terme indépendant de x est positif; le problème admet donc deux solutions pour une valeur donnée m, et, la hauteur SA étant le diamètre augmenté de x, on a

$$SA = 2R\left(m \pm \sqrt{m^2 - 2m}\right).$$

La condition de possibilité du problème est que la quantité sous le radical soit positive. On doit donc avoir

$$m^2 > 2m \quad \text{ou} \quad m > 2.$$

Pour $m = 2$, le rapport donné est minimum, et il vient

$$SA = 4R,$$

c'est-à-dire que, de tous les cônes circonscrits à une sphère donnée, celui dont la surface totale est la plus petite possible doit avoir une hauteur double du diamètre de la sphère, et cette sur-

face totale est aussi double de celle de la sphère. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 312.)

313. Désignant respectivement OE, FE, AO, CO′, OO′ par x, y, 2R, R et h, on a, d'après l'énoncé,

$$\frac{\pi y^2 x}{3} + \frac{\pi(h-x)(y^2+R^2+Ry)}{3} = \frac{\pi h(4R^2+R^2+2R^2)}{6},$$

ou

$$2y^2x + 2(h-x)(y^2+R^2+Ry) = 7R^2h.$$

Développant, il vient

$$2y^2x + 2hy^2 + 2R^2h + 2Rhy - 2y^2x - 2R^2x - 2Rxy = 7R^2h$$

ou

$$2hy^2 + 2R(h-x)y - 2R^2x - 5R^2h = 0.$$

Il faut une relation entre x et y. Or $FI = y - R$, et dans les triangles semblables CFI, CAH on a

$$\frac{FI}{AH} = \frac{CI}{CH} \quad \text{ou} \quad \frac{y-R}{R} = \frac{h-x}{h},$$

d'où, par la composition des rapports,

$$\frac{y-R+R}{R} = \frac{h-x+h}{h} \quad \text{et enfin} \quad y = \frac{R(2h-x)}{h}.$$

Substituant à y sa valeur dans l'équation précédente, il vient

$$\frac{2hR^2(2h-x)^2}{h^2} + \frac{2R^2(h-x)(2h-x)}{h} - 2R^2x - 5R^2h = 0,$$

ou successivement

$$2(4h^2-4hx+x^2) + 2(2h^2-3hx+x^2) - 2hx - 5h^2 = 0,$$

$$8h^2 - 8hx + 2x^2 + 4h^2 - 6hx + 2x^2 - 2hx - 5h^2 = 0,$$

$$4x^2 - 16hx + 7h^2 = 0.$$

$$x = \frac{8h \pm \sqrt{64h^2 - 28h^2}}{4} = \frac{8h \pm h\sqrt{36}}{4} = \frac{8h \pm 6h}{4},$$

enfin

$$x = \frac{h(4 \pm 3)}{2}.$$

La racine $x = \frac{7h}{2}$ est à rejeter, parce qu'elle est plus grande que h. Il reste $x = \frac{h}{2}$. (S.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 313.)

314. On remarquera que les deux cônes SDE, ADE qui doivent avoir même surface latérale, ayant même base DE, doivent avoir même arête et, par suite, même hauteur. On a donc

$$SD = DA, \qquad SC = CA.$$

Si l'on appelle R le rayon donné de la sphère, on a, en écrivant que la tangente SD est moyenne proportionnelle entre la sécante SA et sa partie extérieure SB,

$$(1) \qquad \overline{SD}^2 = SA \times SB.$$

D'ailleurs le triangle rectangle BDA donne

$$(2) \qquad \overline{DA}^2 = BA \times CA;$$

donc, à cause de l'égalité des deux premiers membres, les équations (1) et (2) donnent

$$(3) \qquad SA \times SB = BA \times CA.$$

Mais $SA = SB + 2R$, et puisque

$$SB = SC - BC = CA - BC = R + x - (R - x),$$

ou enfin

$$SB = 2x,$$

il s'ensuit que

$$SA = 2x + 2R = 2(R + x).$$

Donc le premier membre de l'égalité (3) doit s'écrire

$$2(R + x)\,2x = 4(R + x)x.$$

D'autre part, $BA \times CA$ n'est autre chose que $2R(R + x)$. Donc l'équation (3) revient à

$$4(R + x)x = 2R(R + x),$$

ou, après réduction,

$$x = \frac{R}{2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 314.)

315. La surface de la calotte DAE a pour expression, R étant le rayon de la sphère,

$$2\pi R \times AC = 2\pi R x.$$

D'autre part, la surface latérale du cône EBD est

$$(1) \qquad \pi \times DC \times DB.$$

Pour transformer ce produit, remarquons que le triangle rectangle ADB donne

$$\overline{BD}^2 = BA \times BC = 2R(2R - x).$$

D'ailleurs les cordes DE, AB ont les produits de leurs segments égaux entre eux; donc on a

$$DC \times CE = AC \times CB, \quad \text{ou} \quad \overline{DC}^2 = x(2R - x).$$

Donc le produit (1) $\pi \times DC \times DB$, élevé au carré, devient

$$\pi^2 \times x(2R - x) \times 2R(2R - x) = \pi^2 2Rx(2R - x)^2.$$

D'après l'énoncé du problème, cette expression est égale au carré de celle qui donne la surface de la calotte sphérique, c'est-à-dire à $4\pi^2R^2x^2$, d'où l'équation

$$\pi^2 \times 2Rx(2R - x)^2 = 4\pi^2R^2x^2,$$

et, après simplification,

$$(2R - x)^2 = 2Rx,$$

après réduction,

$$x^2 - 6Rx + 4R^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = R(3 \pm \sqrt{5}).$$

La valeur de x ne peut évidemment être plus grande que $2R$, diamètre de la sphère; on devra donc rejeter la racine précédée du signe $+$, et écrire enfin

$$x = R(3 - \sqrt{5}). \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 315.)

316. Le volume du tronc de cône, dont nous appellerons y la hauteur CO et x le rayon de base supérieure DC, a pour expression

$$\tfrac{1}{3}\pi y(R^2 + x^2 + Rx).$$

D'autre part, le volume de la sphère, qui a pour diamètre $OC = y$, a pour expression $\frac{1}{6}\pi y^3$.

L'équation du problème est donc

$$\frac{\frac{1}{3}\pi y(R^2 + x^2 + Rx)}{\frac{1}{6}\pi y^3} = m,$$

et, après simplification,

$$2(R^2 + x^2 + Rx) = my^2,$$

et, si l'on remarque que le triangle rectangle DOC donne

$$y^2 = R^2 - x^2,$$

$$2(R^2 + x^2 + Rx) = m(R^2 - x^2),$$

d'où

$$(m+2)x^2 + 2Rx - (m-2)R^2 = 0$$

et

$$x = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 4(m+2)(m-2)R^2}}{2(m+2)}$$

$$= \frac{-2R \pm 2R\sqrt{1 + m^2 - 4}}{2(m+2)}.$$

Simplifiant et rejetant la racine négative qui ne peut convenir à DC, il vient

$$x = \frac{R}{m+2}\left(\sqrt{m^2 - 3} - 1\right). \quad \text{(S.)}$$

Pour que la valeur de x soit réelle, il faut d'abord que l'on ait sous le radical $m^2 > 3$; mais, comme x est essentiellement positif, il faut que la parenthèse donne aussi

$$\sqrt{m^2 - 3} > 1, \quad \text{ou} \quad m^2 - 3 > 1, \quad \text{ou} \quad m^2 > 4,$$

c'est-à-dire $m > 2$. Si $m = 2$, le rapport donné est minimum, et x devient égal à $\frac{R}{4}$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 316.)

317. Soient r le rayon de la sphère, et $x = DC$, $y = BA$ les rayons de base du tronc de cône, $a = BD$ l'arête latérale du tronc. On a

$$\text{surf. du tronc} = \pi(x + y)a + \pi(x^2 + y^2),$$
$$\text{surf. de la sphère} = 4\pi r^2,$$

d'où

(1) $$\frac{(x+y)a+x^2+y^2}{4r^2}=m.$$

Mais la longueur $a=\mathrm{BD}=\mathrm{BK}+\mathrm{KD}=x+y$, parce que les tangentes issues d'un même point à un même cercle sont égales. L'équation (1) devient donc

$$(x+y)^2+x^2+y^2=4mr^2,$$

ou, après réduction,

(2) $$x^2+xy+y^2=2mr^2.$$

Enfin le triangle rectangle BDE donne

$$\mathrm{BD}^2-\mathrm{DE}^2=\mathrm{BE}^2, \quad \text{ou} \quad (x+y)^2-(x-y)^2=4r^2,$$

et, après réduction,

(3) $$xy=r^2.$$

Additionnant (2) et (3), il vient

(4) $$(x+y)^2=2mr^2+r^2, \quad \text{ou} \quad x+y=r\sqrt{2m+1}.$$

Retranchant de l'équation (2) le triple de l'équation (3), on a

(5) $$(x-y)^2=2mr^2-3r^2, \quad \text{ou} \quad x-y=r\sqrt{2m-3},$$

d'où, en prenant la somme et la différence des équations (4) et (5),

$$x=\frac{r}{2}\left(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3}\right), \quad \text{(S.)}$$

$$y=\frac{r}{2}\left(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3}\right). \quad \text{(S.)}$$

Le problème n'est possible que si l'on a sous le radical $2m>3$, ou $m>\frac{3}{2}$.

Pour $m=\frac{3}{2}$, le rapport devient minimum, et dans ce cas les valeurs de x et de y, qui deviennent égales, se confondent avec r. Le tronc de cône devient un cylindre ayant pour hauteur le diamètre de la sphère, et il est facile de vérifier directement que le rapport des deux surfaces totales est $\frac{3}{2}$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 317.)

318. Soient $a > b$, et x la distance du point S à la base supérieure, y la distance SP.

La surface latérale du cône CSD a pour expression $\pi b.\mathrm{CS}$.

Celle du cône ESK .... $\pi a.\mathrm{ES}$; d'où l'équation

$$\pi b.\mathrm{CS} = \pi a.\mathrm{ES};$$

et si l'on remarque que $\mathrm{CS} = \sqrt{b^2 + x^2}$, $\mathrm{ES} = \sqrt{a^2 + y^2}$, il vient

$$b\sqrt{b^2 + x^2} = a\sqrt{a^2 + y^2},$$

et en élevant au carré,

$$b^2(b^2 + x^2) = a^2(a^2 + y^2) = a^4 + a^2y^2.$$

Remplaçant y^2 par sa valeur $(h - x)^2 = h^2 - 2hx + x^2$, il vient

$$b^4 + b^2x^2 = a^4 + a^2h^2 - 2a^2hx + a^2x^2,$$

d'où

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2hx + (a^4 - b^4 + a^2h^2) = 0.$$

Remarquons immédiatement que le produit des racines $\frac{a^4 - b^4 + a^2h^2}{a^2 - b^2}$ a son numérateur et son dénominateur positifs; donc les racines sont de même signe. Leur somme vaut d'ailleurs $\frac{2a^2h}{a^2 - b^2}$; elle est aussi positive, et les deux racines sont positives; nous prendrons donc celle des deux valeurs qui nous donnera $x < h$. On trouve en résolvant

$$x = \frac{2a^2h \pm \sqrt{4a^4h^2 - 4(a^2 - b^2)(a^4 - b^4 + a^2h^2)}}{2(a^2 - b^2)}.$$

Faisant sortir 4 du radical et simplifiant par 2 haut et bas; remarquant d'ailleurs que la quantité sous le radical devient alors

$$a^4h^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4)$$
$$- a^4h^2 + a^2h^2b^2 = a^2h^2b^2 - (a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2),$$

il vient

$$x = \frac{a^2h \pm \sqrt{a^2h^2b^2 - (a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2)}}{a^2 - b^2},$$

et, puisque x doit être moindre que h, on prendra le signe —

devant le radical, la quantité $\frac{a^2h}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}\times h$ contenant déjà le facteur $\frac{a^2}{a^2-b^2}$, qui est >1.

Enfin il faut, pour que x soit réel, que l'on ait sous le radical

$$a^2h^2b^2 \geqslant (a^2-b^2)^2(a^2+b^2)$$

ou

$$abh \geqslant (a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2},$$

ou enfin

$$h \geqslant \frac{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 318.)

319. On a, d'après l'énoncé,

$$\left.\begin{matrix}\text{surf. SCD}\\ \text{surf. SAB}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \left.\begin{matrix}\text{surf. SEK}\\ \text{surf. SAB}\end{matrix}\right\}=\frac{2}{3}.$$

Mais les cônes SCD, SEK, SAB étant semblables, leurs surfaces atérales sont proportionnelles aux carrés des dimensions homologues. On a donc (h étant la hauteur donnée)

$$\text{surf. SCD}=\overline{SM}^2=\overline{SM}^2,$$
$$\text{surf. SAB}=\overline{SO}^2=h^2,$$
$$\text{surf. SEK}=SN^2=SN^2,$$
$$\text{surf. SAB}=\overline{SO}^2=h^2.$$

En comparant ces rapports à ceux qui sont donnés par l'énoncé, on a, à cause des premiers membres semblables,

$$\frac{\overline{SM}^2}{h^2}=\frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad \overline{SM}^2=\tfrac{1}{3}h^2 \quad \text{et} \quad SM=\frac{h\sqrt{3}}{3},$$

$$\frac{\overline{SN}^2}{h^2}=\frac{2}{3}, \quad \text{d'où} \quad \overline{SN}^2=\tfrac{2}{3}h^2 \quad \text{et} \quad SN=\frac{h\sqrt{6}}{3}.$$

En effectuant le calcul des racines, on trouverait

$$SM=0{,}5773503.h, \quad (S.)$$
$$SN=0{,}8164966.h. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 319.)

320. L'équation du problème est

$$\frac{\pi.\mathrm{CE}\times\mathrm{AC}}{\pi.\mathrm{CE}\times\mathrm{CB}}=\frac{m}{n},$$

et, après réduction,

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}=\frac{m}{n}.$$

Mais le triangle ACB étant rectangle en C, les côtés de l'angle droit donnent la relation

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{CB}}^2}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=\frac{\mathrm{R}-x}{\mathrm{R}+x}.$$

Si donc on élève au carré les deux membres de l'équation (1), il vient

$$\frac{\mathrm{R}-x}{\mathrm{R}+x}=\frac{m^2}{n^2},\quad \text{d'où}\quad n^2\mathrm{R}-n^2x=m^2\mathrm{R}+m^2x,$$

et enfin

$$x=\frac{(n^2-m^2)\mathrm{R}}{n^2+m^2}.\qquad (\mathrm{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 320.)

On voit d'ailleurs que, la valeur de x devant être positive et plus petite que R, la condition de possibilité du problème est $n>m$. Si $n=m$, le rapport donné devient égal à l'unité, et si les cônes sont égaux, dans ce cas le numérateur de x s'annule, et le cercle CD devient un grand cercle, ce qui est évident *à priori*.

321. La surface totale du cône a pour expression

$$\pi xy+\pi x^2=\pi x(y+x),$$

d'où l'équation

$$\pi x(y+x)=\pi a^2$$

ou

$$(1)\qquad x(y+x)=a^2.$$

D'autre part, la surface du triangle rectangle SAO, qui engendre le cône, vaut

$$\frac{x\times\mathrm{SO}}{2}=\frac{x\sqrt{y^2-x^2}}{2},\quad \text{d'où}\quad \frac{x\sqrt{y^2-x^2}}{2}=2b^2,$$

ou enfin

(2) $$x\sqrt{y^2 - x^2} = 4b^2.$$

Divisons membre à membre les équations (1) et (2), il vient

$$\frac{x\sqrt{y^2 - x^2}}{x(y+x)} = \frac{4b^2}{a^2};$$

réduisant et élevant au carré,

$$\frac{y^2 - x^2}{(y+x)^2} = \frac{16b^4}{a^4};$$

simplifiant par $y + x$,

$$\frac{y-x}{y+x} = \frac{16b^4}{a^4}, \quad \text{ou} \quad \frac{y+x-(y-x)}{y+x} = \frac{a^4 - 16b^4}{a^4},$$

ou

$$\frac{2x}{y+x} = \frac{a^4 - 16b^4}{a^4};$$

multipliant membre à membre par l'équation (1),

$$\frac{2x^2(y+x)}{y+x} = \frac{(a^4 - 16b^4)a^2}{a^4}, \quad \text{d'où} \quad 2x^2 = \frac{a^4 - 16b^4}{a^2}$$

et

$$x = \frac{\sqrt{a^4 - 16b^4}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2(a^4 - 16b^4)}}{2a}. \quad \text{(S.)}$$

Mais l'équation (1) donne

$$y = \frac{a^2 - x^2}{x} = \left(\frac{a^2 - a^4 - 16b^4}{2a^2}\right) \times \frac{2a}{\sqrt{2(a^4 - 16b^4)}}$$

$$= \frac{a^4 + 16b^4}{a\sqrt{2(a^4 - 16b^4)}}.$$

Multipliant haut et bas par le radical,

$$y = \frac{(a^4 + 16b^4)\sqrt{2(a^4 - 16b^4)}}{2a(a^4 - 16b^4)}. \quad \text{(S.)}$$

On remarquera que les valeurs de x et y ne sont réelles que si l'on a sous le radical $a^4 > 16b^4$, ou, les quantités a^2 et b^2 étant essentiellement positives, $a^2 > 4b^2$, ou enfin $\frac{a^2}{2} > 2b^2$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 321.)

2° PROBLÈMES SUR LES VOLUMES ET LES SURFACES DE RÉVOLUTION.

322. Abaissons des points C et D des perpendiculaires CP, DQ à AB. Il est clair que le volume V engendré par le parallélogramme ABCD est égal au volume engendré par PCDQ. Son expression est donc

$$V = \pi . CP^2 \times PQ = \pi . CP^2 \times AB.$$

Mais dans ACP on a

$$CP = CA \sin A;$$

donc

$$V = \pi \times AB \times AC^2 \times \sin^2 A,$$
$$V = 4167^{mc},083. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 322.)

323. Le volume cherché V est la différence entre le tronc de cône engendré par le trapèze AOCE et la demi-sphère engendrée par le quart de cercle AOC.

Les rayons des bases du tronc de cône sont évidemment R et 2R; sa hauteur est R : donc son volume v sera

$$v = \tfrac{1}{3}\pi R(R^2 + 4R^2 + 2R \times R),$$
$$v = \tfrac{7}{3}\pi R^3.$$

Le volume v' de la demi-sphère est

$$v' = \tfrac{2}{3}\pi R^3; \quad \text{donc} \quad V = v - v' = \tfrac{5}{3}\pi R^3.$$

Si nous faisons $R = 13549^m$,

$$V = 13023300000000^{mc}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 323.)

324. La surface cherchée S se compose de la zone engendrée par AP et de la surface du cylindre engendré par PQ.

$$\text{surf. de la zone} = 2\pi RH,$$
$$\text{surf. du cylindre} = 2\pi \times MP \times PQ.$$

Mais

$$MP = \sqrt{H(2R - H)}, \qquad PQ = 2R - H.$$

Nous aurons donc

$$S = 2\pi\left[RH + \sqrt{H(2R - H)^3}\right].$$

$$S = 67^{mq},89. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 324.)

325. Dans la révolution, les figures ABDE et ACDE engendrent deux troncs de cône. Le volume cherché V n'est autre chose que la différence entre ces troncs de cône; leur hauteur est celle du triangle, qui a pour valeur $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Les volumes des deux troncs sont

$$\tfrac{1}{3}\pi\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\left(4 + \frac{9}{4} + 3\right) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{3}\pi\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} + 1 + \frac{3}{2}\right).$$

Faisant la différence et simplifiant, il nous reste

$$V = \tfrac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 325.)

326. Représentons par R le rayon du cercle, par d la distance OS, par V et S le volume et la surface du cône; nous aurons

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\overline{AP}^2 \times PS.$$

Les triangles rectangles semblables ASO, APO et ASP nous donnent les valeurs de AP et PS, savoir :

$$\overline{AP}^2 = \frac{R^2}{d^2}(d^2 - R^2),$$

$$PS^2 = \frac{1}{3}(d^2 - R^2);$$

donc

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\frac{R^2(d^2 R^2)}{d^3} = 17^{mmc},146. \quad (S.)$$

En second lieu,

$$S = \pi AP \times AS = \frac{\pi R}{d}(d^2 - R^2) = 1^{dq},2667. \quad (S.)$$

327. Le volume engendré V est égal à la somme des volumes des cônes droits engendrés par CIA et CIB :

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\overline{CI}^2 \times IA + \tfrac{1}{3}\pi\overline{CI}^2 \times IB = \tfrac{1}{3}\pi \times AB \times \overline{CI}^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi \times AB \times \overline{AC}^2 \sin^2 A,$$

en faisant

$$AB = 23{,}215,$$
$$AC = 21{,}107,$$
$$A = 23^\circ 27' 30'',2,$$
$$V = 1716^{mc},320. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 327.)

328. Abaissons CP perpendiculaire sur AX, et désignons par α l'angle CAX :

$$\alpha = 90^\circ - BAC = 59^\circ 34' 30''.$$

Le volume cherché est égal à la différence entre le volume du tronc de cône engendré par ABCP et celui du cône engendré par CAP. Évaluons ces deux volumes v et v' :

$$v = \tfrac{1}{3}\pi AP(BA^2 + CP^2 + BA.CP).$$

Nous connaissons BA ; d'ailleurs

$$AP = AC\cos\alpha \quad \text{et} \quad PC = AC\sin\alpha.$$

Effectuant les calculs, nous trouvons

$$v = 30^{mc},433.$$

Le volume du cône

$$v' = \tfrac{1}{3}\pi.AP \times CP^2 = 11^{mc},598;$$

et enfin

$$V = v - v' = 18^{mc},837. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 328.)

329. Abaissons AH perpendiculaire sur CB, puis HI perpendiculaire à xy ; nous aurons, en appelant V le volume cherché,

$$V = \text{surf.}BC \times \tfrac{1}{3}AH.$$

Or

$$\text{surf.}BC = 2\pi HI \times BC.$$

Appelons a le côté du triangle ; il est facile de s'assurer que l'angle AHI est de 42 degrés. Dans le triangle AHI on a

$$HI = AH\cos 42^\circ = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}\cos 42^\circ.$$

Par suite,

$$\text{surf. BC} = \pi a^2 \sqrt{3} \cos 42^\circ \quad \text{et} \quad V = \tfrac{1}{2}\pi a^3 \cos 42^\circ;$$

faisant $a = 7^m,35$,

$$V = 463^{mc},508. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 329.)

330. Abaissons des perpendiculaires sur AE des points B, C, D; soient BP, CQ, DH. Le volume cherché V se composera de

cône BAP,
+ tronc de cône CBPQ,
+ tronc de cône CDHQ,
— cône..... DEH.

Désignons par a le côté du carré, et, remarquant que les angles BAP, BCQ sont égaux à 60 degrés, que l'angle DCQ vaut 30 degrés ainsi que DEH, et calculant les divers volumes partiels, on trouve

$$V = \tfrac{1}{4}\pi a^3 (3 + 2\sqrt{3}),$$

et en faisant $a = 13^m,217$,

$$V = 11711^{mc},690. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 330.)

331. Posons $AB = h$, $BC = b$ et $CM = d$.

Le volume engendré par le rectangle ABCD est la différence des volumes engendrés par les rectangles ABMN et DCMN; ainsi

$$\begin{aligned} V &= \pi (b + d)^2 h - \pi d^2 h, \\ &= \pi bh (b + 2d), \\ &= bh \times 2\pi \left(\frac{b}{2} + d\right). \end{aligned}$$

Or bh est la surface du rectangle et $d + \frac{b}{2}$ la distance du centre de gravité à l'axe. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 331.)

332. Le trapèze en tournant engendre un tronc de cône; le demi-cercle engendre une sphère : le volume cherché est la différence entre les volumes de ce tronc de cône et de cette sphère. Faisons

$$AB = a, \quad BN = b, \quad AM = c.$$

Si nous désignons par V le volume que nous voulons exprimer,

$$V = \tfrac{1}{3}\pi a(b^2 + c^2 + bc) - \tfrac{1}{6}\pi a^3,$$
$$V = \tfrac{1}{6}\pi a(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2bc).$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 332.)

333. Le volume cherché est un cône droit à base circulaire; le rayon de la base de ce cône MB est égal à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit, soit égal à $\frac{1}{2}$ OM $\sqrt{3}$. Quant à la hauteur, nous aurons

$$\overline{OM}^2 = OB \times OP,$$

donc

$$OP = 2OM, \quad \text{et} \quad BP = 2OM - \tfrac{1}{2}OM = \tfrac{3}{2}OM;$$

donc, en appelant V le volume cherché, nous aurons

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \times \tfrac{1}{4} \times \overline{OM}^2 \times 3 \times \tfrac{3}{2} \times OM = \tfrac{3}{8}\pi \times \overline{OM}^3;$$

faisant OM = 20^m, nous aurons

$$V = 300\,\pi = 9424{,}677960. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 333.)

334. Menons EF parallèle à AB, le volume engendré par EMB est égal à la différence d'un tronc de cône décrit par EFAM et du cylindre décrit par EFAB; en appelant h la hauteur du rectangle,

$$\text{vol. EMB} = \tfrac{1}{2}\pi bh\left(a + \frac{b}{3}\right).$$

Nous voyons ici une nouvelle occasion de vérifier le théorème de Guldin; le volume EMB est égal à la surface génératrice $\frac{1}{4}bh$, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité

$$2\pi\left(a + \frac{b}{3}\right);$$

de même

$$\text{vol. ENC} = \tfrac{1}{2}\pi bh\left(a - \frac{b}{3}\right),$$

$$\frac{\text{vol. EMB}}{\text{vol. ENC}} = \frac{a + \frac{1}{3}b}{a - \frac{1}{3}b} = \frac{3a + b}{3a - b}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 334.)

335. Le volume engendré est la somme des volumes de deux cônes droits égaux. Appelons R le rayon commun et H la hauteur, le volume cherché V sera égal à

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^2 H = \tfrac{2}{3}\pi (2{,}50^2 - 1{,}25^2)\,1{,}25 = 12^{mc},271875. \quad (S.)$$

336. Appelons V le volume, a le côté du triangle. Le volume sera égal à la surface du cylindre décrit par MN, multipliée par $\frac{1}{2}$AB.

$$\text{surf. MN} = 2\pi RH = 2\pi \times \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} \times a = \pi a^2 \sqrt{3},$$

$$\tfrac{1}{3}AB = \tfrac{1}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \tfrac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2};$$

donc

$$V = \tfrac{1}{2}\pi a^3 = 327^{mc},5546. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 336.)

337. Si l'on suppose connu le théorème de Guldin, dont le précédent problème n'est qu'un cas tout particulier, mais que l'on énonce : *Le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal à la surface decrivante, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette surface*, la solution est des plus simples.

Les volumes engendrés par les triangles ABC, ADC seront égaux entre eux, parce que ces triangles ont des surfaces égales et que leurs centres de gravité se trouvent sur la même parallèle BD à l'axe; ils seront égaux chacun à

$$\tfrac{1}{2}ab \times 2\pi.01 = \tfrac{1}{2}ab \times 2\pi \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi a^2 b^2 \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Les volumes décrits par les triangles ABD, BDC seront la première moitié du second, parce que, les surfaces étant égales, le centre de gravité du premier O est deux fois plus rapproché de l'axe que le centre de gravité du deuxième O'. Ainsi le premier vaudra

$$\tfrac{2}{3}\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et le second

$$\tfrac{4}{3}\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

car la somme vaut

$$\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Autre démonstration. Si nous supposons ce théorème non démontré, abaissons des points B, C, D des perpendiculaires à l'axe, savoir BE, CKF, DG; évaluons successivement chacun des quatre volumes demandés:

1' volume ABC,

$$\text{volume ABC} = \text{surf. BC} \times \tfrac{1}{3}\,\text{AB};$$

mais

$$\text{surf. BC} = \pi\,.\,\text{BC}(\text{BE}+\text{CF}).$$

Remarquons que CE est double de BE, puisque K est le milieu de CE; or BE est la hauteur du triangle rectangle ABD, dont les côtés sont a et b; elle vaut donc

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{donc} \quad \text{surf. BC} = 3\pi\,\frac{ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et par suite

$$\text{vol. ABC} = \frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On calculerait par les mêmes moyens les volumes engendrés par les autres triangles; le calcul est, comme on voit, assez long; nous ne le développerons pas, puisque nous savons déjà quels seront les résultats.

338. La partie du volume engendrée par ADX est inutile à considérer, car elle sera située tout entière à l'intérieur de celui qu'engendrera ABCX; occupons-nous donc seulement de ce dernier, nous aurons

$$\text{vol. ABCX} = \text{vol. ABI} + \text{vol. BIH} - (\text{vol. CKX} + \text{vol. CKH}),$$

$$\text{vol. ABI} = \tfrac{1}{3}\pi\,\overline{\text{BI}}^2 \times \text{AI},$$

$$\text{vol. BIH} = \tfrac{1}{3}\pi\,\overline{\text{BI}}^2 \times \text{IH},$$

$$\text{vol. CKX} = \tfrac{1}{3}\overline{\text{CK}}^2 \times \text{KH},$$

$$\text{vol. CKH} = \tfrac{1}{3}\overline{\text{CK}}^2 \times \text{KH};$$

donc

$$\text{vol. ABCK} = \tfrac{1}{3}\pi\left(\overline{\text{BI}}^2 \times \text{AH} - \overline{\text{CK}}^2 \times \text{KH}\right).$$

Calculons les valeurs de BI, AH, CK, XH; pour cela, nous aurons

$$BI = a \sin 60° = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3},$$

$$AH = \frac{a}{\sin 30} = 2a,$$

$$CK = CX \sin 60° = \frac{1}{2} \times CX \sqrt{3},$$

$$HX = \frac{CX}{\sin 30} = 2CX.$$

Reste à trouver CX;

$$CX = CD - XD = a - a \operatorname{tang} 30° = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

remplaçant les lignes par leurs valeurs en fonction de a, dans vol. ABCX,

$$\text{vol. ABCX} = \pi a^3 \left(\frac{10 - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\right) = 6^{mc},635218. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 338.)

339. Le théorème de Guldin nous donne

$$\text{vol. V} = \text{surf. ABCD} \times \text{circ. OA}$$

(O étant le centre de gravité, c'est-à-dire le milieu de AC),

$$AC = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2} = 2,5;$$

donc

$$V = 12 \times 2\pi \times 2,5 = 60\pi = 18^{mc},849555. \quad (S.)$$

Autre solution. Le volume total est égal à la somme des volumes engendrés par les triangles CBA et CDA :

$$V = \text{vol. CBA} + \text{vol. CDA},$$

$$V = \text{surf. CB} \times \tfrac{1}{3} BA + \text{surf. CD} \times \tfrac{1}{3} DA,$$

$$V = \pi \times CB(CA + BH)\tfrac{1}{3} BA + \pi \times CD(CA + DK) \times \tfrac{1}{3} DA,$$

$$V = \pi \times 3\left(5 + \frac{16}{5}\right)\frac{1}{3} \times 4 + \pi \times 4\left(5 + \frac{9}{5}\right) \times \frac{1}{3} \times 3,$$

$$V = 4\pi\left(\frac{41}{5} + \frac{34}{5}\right) = \frac{4}{5}\pi \times 75 = 60\pi.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 339.)

340. Prenons le côté DF pour axe de rotation; le volume engendré se composera de trois parties : le cylindre engendré par le rectangle ABDE et les volumes engendrés par les triangles BCD, AFE, qui sont égaux entre eux.

1° Le volume engendré par ABDE est un cylindre ayant pour rayon $AE = AB\sqrt{3}$ et pour hauteur AB; donc ce volume V_1 est représenté par

$$V_1 = 3\pi\overline{AB}^2.$$

2° Le volume engendré par BCD est égal à

$$\text{surf.} = BC \times \tfrac{1}{2} DI.$$

La surface décrite par BC est celle d'un tronc de cône.

$$\text{surf. } BC = \pi \times BC\,(BD + CH) = 3\pi \times BC \times CH = \tfrac{3}{2}\pi \times \overline{AB}^2\sqrt{3}.$$

Quant à la hauteur DI, le triangle DCG étant équilatéral,

$$DI = CH = \tfrac{1}{2} BD = \tfrac{1}{2} AB\sqrt{3};$$

donc, en appelant V_2 le volume engendré par BCD,

$$V_2 = \tfrac{3}{4}\pi\overline{AB}^3;$$

doublant pour comprendre le volume engendré par AEF et ajoutant à V_1 pour avoir le volume total V,

$$V = 3\pi\overline{AB}^3 + \tfrac{3}{2}\pi\overline{AB}^3 = \tfrac{9}{2}\pi\overline{AB}^3.$$

Si $AB = 1^m$,

$$V = \tfrac{9}{2}\pi = 14^{mc},137. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 340.)

341. Menons EF parallèle à AB et désignons BC par πh.

1° $V = \text{vol. } EBM = \text{vol. } AMEF - \text{vol. } AFEB,$

$$\text{vol. } AMEF = \frac{\pi h}{3}[(a+b)^2 + a^2 + a(a+b)],$$

$$\text{vol. } AFEB = \frac{3\pi h}{3} \times a^2,$$

d'où

$$V = \frac{\pi h}{3}[(a+b)^2 + a(a+b) - 2a^2].$$

2° $V' - \text{vol. ENC} = \text{vol. FECD} - \text{vol. FEND}$,

$$\text{vol. FECD} = \frac{3\pi h}{3} \times a^2,$$

$$\text{vol. FEND} = \frac{\pi h}{3}[(a-b)^2 + a^2 + a(a-b)],$$

et par suite

$$V' = \frac{\pi h}{3}[2a^2 - (a-b)^2 - a(a-b)];$$

on en déduit

$$\frac{V}{V'} = \frac{3ab + b^2}{3ab - b^2} = \frac{3a+b}{3a-b}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 341.)

342. On a

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. AKF} - 2\,\text{vol. CDF} - \text{vol. BCDD}';$$

or

$$\text{vol. AKF} = \frac{\pi \overline{AL}^2 \times KF}{3},$$

$$2\,\text{vol. CDF} = \frac{2\pi \overline{CD}^2 \times DF}{3} \qquad \text{vol. BCDD}' = \pi \overline{CD}^2 \times DD';$$

or on a

$$AL = AM + ML = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad \overline{AL}^2 = \frac{7+4\sqrt{3}}{4},$$

$$\left.\begin{array}{l} KF = DD' + 2DF \\ DF = \dfrac{CD \times CM}{AM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} KF = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3};$$

on en conclut

$$\text{vol. AKF} = \frac{\pi(7+4\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}{36} = \frac{(45+26\sqrt{3})\pi}{36},$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\text{vol. CDF} = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9} = \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{36} \\ \text{vol. BCDD}' = \pi = \dfrac{36\pi}{36} \end{array}\right\} \text{d'où} \quad x = \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{4}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 342.)

343. Le volume cherché est égal au volume engendré par le

trapèze ABCD, moins le volume engendré par le triangle rectangle ADC.

$$\text{vol. ABCD} = \tfrac{1}{3}\pi \text{AD}(\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{DC}}^2 + \text{AB} \times \text{DC}),$$
$$\text{vol. ADC} = \tfrac{1}{3}\pi \text{AD} \times \overline{\text{DC}}^2.$$

Il s'agit d'abord de calculer AD et DC. Or, dans le triangle ADC, on connaît l'hypoténuse AC et l'angle CAD = 45°. On a

$$\text{AD} = \text{AC} \cos \text{CAD} = 6.\cos 45° = 3\sqrt{2},$$
$$\text{DC} = \text{AC} \sin \text{CAD} = 6.\sin 45° = 3\sqrt{2}.$$

Le volume cherché est

$$\text{V} = \tfrac{1}{3}\pi \text{AD}(\overline{\text{AB}}^2 + \text{AB} \times \text{DC}) = \pi\sqrt{2}(25 + 15\sqrt{2}),$$
$$\text{V} = 205^{\text{mc}},320. \quad (\text{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 343.)

344. La surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze BOCD tournant autour de CO est égale au produit de l'apothème BD par la demi-somme des circonférences de base, savoir :

$$\frac{1}{2} \times 2\pi \times (\text{CD} + \text{OB}) \times \text{BD}.$$

Or

$$\text{CD} = \tfrac{1}{2}\text{BO} = 0,75, \qquad \text{BO} = 1,5,$$
$$\text{BD} = \sqrt{\overline{\text{BK}}^2 + \overline{\text{DK}}^2} = \sqrt{\overline{\text{CD}}^2 + \overline{\text{CO}}^2}, \qquad \text{BD} = 1,25.$$

La surface cherchée est donc

$$\text{S} = 3,1416 \times (0,75 \times 1,50) \times 1,25 = 8^{\text{mq}},833750. \quad (\text{S.})$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 344.)

345. Le volume engendré par le secteur AOB est égal à

$$\text{zone AB} \times \tfrac{1}{3}\text{R},$$
$$\text{zone AB} = 2\pi\text{R} \times \text{AC}.$$

Or

$$\text{AC} = \text{AO} - \text{OC} = \text{R} - \text{R}\cos\widehat{\text{BOA}};$$

donc

$$\text{vol. cherché} = \frac{2\pi\text{R}^3}{3}(1 - \cos\widehat{\text{BOA}}).$$

Dans le cas qui nous occupe, le volume cherché x est

$$x = \frac{2 \times 3,1416 \times 7,34^3}{3} \times (1 - \cos 55^\circ),$$

$$x = 2,0944 \times 7,34^3 \times (1 - 0,57357),$$

$$x = 355^{mc},968. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 345.)

346. Le volume demandé est la différence entre le tronc de cône engendré par le trapèze ABCC',

$$\frac{\pi}{3} AC' (\overline{CC'}^2 + \overline{AB}^2 + CC'.AB),$$

et le cône engendré par le triangle ACC',

$$\frac{\pi}{3} AC'.\overline{CC'}^2.$$

Cette différence est

$$V = \frac{\pi}{3} AC'.AB(AB + CC').$$

Posons $AB = C$, $AC = b$, il vient

$$AC' = b \sin A, \quad CC' = b \cos A,$$

et par suite

$$V = \frac{\pi}{3} bc \sin A (c + b \cos A),$$

expression que l'on vérifierait aisément au moyen d'un des théorèmes de Guldin, en considérant la médiane issue du sommet B.

Avec les données actuelles, on trouvera

$$V = 1703933^{mc},1. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 346.)

347. Le volume V demandé se compose :

1° Des volumes engendrés respectivement par les triangles BAF et CDE. Ces volumes sont évidemment égaux, et leur somme a pour expression

(1) $$2 \times \tfrac{1}{3} BB' \times \text{surf. AF}.$$

La distance BB' est égale à l'apothème OP de l'hexagone, car,

dans le triangle BAI, les angles en A et en B sont tous deux de 60°. Si donc $AB = a$, on aura

$$BB' = AA' = OP = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

d'ailleurs

$$\text{surf. } AF = AF \times 2\pi \frac{AA' + BF}{2}$$

$$= a \times \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{2}\right) a^2;$$

l'expression (1) devient donc

$$(2) \qquad \frac{3.\pi}{2} a^2.$$

2° Du cylindre engendré par le rectangle BFEC. Ce cylindre a pour volume

$$\pi.\overline{BF}^2.FE = \pi \times (a\sqrt{3})^2 \times a,$$

$$(3) \qquad = 3\pi a^3.$$

Ajoutant (2) et (3), il vient

$$(4) \qquad V = \tfrac{9}{2}\pi a^3.$$

Ici $a = 1$, et l'on trouve

$$V = 14^{mc},137167. \quad (S.)$$

On retrouverait facilement l'expression (4) au moyen de ce théorème de Guldin : *Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.* Ici la surface est celle de l'hexagone $\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$; le rayon est l'apothème $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; le produit est bien $\frac{9\sqrt{3}}{2} a^2$.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 347.)

348. Soit $AB = a$, $CD = b$, $DD' = CC' = h$. Le volume V engendré se compose :

1° Du cône engendré par le triangle AD'D, $\frac{1}{3}\pi h^2.AD'$;

2° Du cylindre engendré par le rectangle CDC'D', $\pi h^2 b$;

3° Du cône engendré par le triangle CC'B, $\frac{1}{3}\pi h^2 . C'B$.

Ainsi

$$V = \pi h^2\left(\frac{AD' + BC'}{3} + b\right) = \frac{\pi h^2}{3}(a + 2b),$$

car

$$AD' + BC' = AB - D'C' = a - b.$$

Évaluons h. Le triangle ADB' donne

$$h = DD' = AD . \sin A,$$

$$AD = \frac{AB' \sin B}{\sin ADC'} = \frac{(a - b \sin B)}{\sin(A + B)},$$

ainsi

$$h = \frac{(a - b)\sin A . \sin B}{\sin(A + B)},$$

et par suite

$$V = \frac{\pi}{3}(a + 2b)(a - b)^2 \frac{\sin^2 A . \sin^2 B}{\sin^2(A + B)}.$$

Les Tables de logarithmes donnent

$$\begin{aligned}
\log \pi &= 0,4791499 \\
\log(a + 2b) &= 1,8249390 \\
2\log(a - b) &= 2,3608252 \\
2\log\sin A &= \bar{1},6394908 \\
2\log\sin B &= \bar{1},8876894 \\
C^t\, 2\log\sin(A + B) &= 0,0261708 \\
C^t\, \log 3 &= \bar{1},5228787 \\
\hline
\log V &= 3,7791438 \\
V &= 6013^{mc},727.
\end{aligned}$$

Guldin a montré que le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité. Ce théorème peut servir à vérifier la précédente expression de V. En effet, d'après une formule établie dans tous les Traités de Mécanique, la distance du centre de gravité du trapèze ABCD à la base $AB = a$ est

$$\delta = \frac{h}{3} \times \frac{a + 2h}{a + b};$$

alors

$$V = \frac{a+b}{2} h \times 2\pi x = \frac{\pi}{3} h^2 (a+2b). \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 348.)

349. D'après le théorème de Guldin, le volume engendré par une figure plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal au produit de cette surface par la circonférence que décrit son centre de gravité. Or le centre de gravité du rectangle est évidemment le point de rencontre des diagonales.

On aura donc ici, pour le volume engendré par la rotation autour de l'axe $DC = a$,

$$V_a = ab \sin\varphi \times 2\pi \times OP,$$

$$OP = \tfrac{1}{2} AA' = \tfrac{1}{2} b \sin\varphi;$$

donc

$$V_a = \pi ab^2 \sin^2\varphi,$$

de même

$$V_b = \pi ba^2 \sin^2(180° - \varphi) = \pi ba^2 \sin^2\varphi;$$

par suite

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}, \quad (S.)$$

ou, si l'on veut, les volumes sont inversement proportionnels aux longueurs correspondantes des côtés servant d'axe de rotation. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 349.)

350. Soit $Om = a$ l'apothème de l'octogone $= \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

surf. engendrée par le demi-octogone ACDEB

$$= 2\pi a \times AB = 2\pi a \times 2R = 4\pi a R;$$

$$\text{vol. demandé} = \text{surf. ACDEB} \times \frac{om}{3},$$

$$\text{vol. demandé} = 4\pi a R \times \frac{a}{3} = \tfrac{4}{3}\pi a^2 R,$$

et, remplaçant a par sa valeur $\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R \times \frac{R^2}{4}(2+\sqrt{2}) = \tfrac{1}{3}\pi R^3 (2+\sqrt{2}). \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 350.)

351. Les côtés AC et BC engendrent chacun la surface latérale d'un cône dont le rayon commun est CD et les côtés a et b; on a donc

$$\text{surf. AC} = \pi\,\text{CD} \times b,$$
$$\text{surf. BC} = \pi\,\text{CD} \times a;$$

ajoutant,

$$\text{surf. AC} + \text{surf. BC} = \pi\,\text{CD}\,(a+b),$$

mais

$$\text{CD} = \sqrt{\text{AD} \times \text{BD}},$$

et l'on a

$$\text{AD} = \frac{b^2}{c}, \quad \text{BD} = \frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad \text{C} = \sqrt{a^2+b^2};$$

donc

$$\text{surf. AC} + \text{surf. BC} = \frac{\pi ab\,(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$= \frac{3{,}1416 \times 3{,}2 \times 2{,}3 \times 5{,}5}{3{,}94} = 32^{\text{mq}},2771. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 351.)

352. Soient b et h la base et la hauteur du triangle isoscèle, C son côté AB = AC.

D'après l'énoncé, on aura les équations

$$\tfrac{1}{2}bh = a^2, \qquad 2\pi h\text{C} = 4\pi\text{R}^2,$$

ou bien

$$bh = 2a^2, \qquad \text{C}h = 2\text{R}^2:$$

mais on a aussi

$$\text{C}^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Or on tire des deux premières équations

$$b = \frac{2a^2}{h}, \qquad \text{C} = \frac{2\text{R}^2}{h};$$

en substituant dans la troisième, on a

$$\frac{4\text{R}^4}{h^2} = h^2 + \frac{a^4}{h^2}, \quad \text{ou} \quad 4\text{R}^4 = h^4 + a^4,$$

d'où

$$h^4 = 4\text{R}^4 - a^4 \quad \text{et} \quad h = \sqrt[4]{4\text{R}^4 - a^4};$$

par suite

$$b = \frac{2a^2}{\sqrt[4]{4\text{R}^4 - a^4}}, \quad \text{C} = \frac{2\text{R}^2}{\sqrt[4]{4\text{R}^4 - a^4}}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 352.)

353. Soit $AB = 2R$. La zone engendrée par l'arc AC est

$$Z = 2\pi R \times AD,$$

et la surface latérale du cône engendré par AC est

$$S = \pi \times CD \times AC.$$

D'après l'énoncé, on aura

$$\frac{2\pi R \times AD}{\pi \times CD \times AC} = \frac{m}{n},$$

ou

$$\frac{2R \times AD}{CD \times AC} = \frac{m}{n},$$

ou bien

$$\frac{4R^2 \times \overline{AD}^2}{\overline{CD}^2 \times \overline{AC}^2} = \frac{m^2}{n^2};$$

or

$$\overline{CD}^2 = AD \times DB \quad \text{et} \quad \overline{AC}^2 = AB \times AD = 2R \times AD;$$

en substituant, on aura

$$\frac{4\overline{R}^2 \times \overline{AD}^2}{\overline{AD} \times DB \times 2R \times AD} = \frac{2R}{DB} = \frac{m^2}{n^2},$$

d'où l'on tire

$$DB = 2R \times \frac{n^2}{m^2}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 353.)

354. Prenons pour inconnue la projection $AD = x$ de la corde AC sur le diamètre AB. Le volume engendré par le segment circulaire AMC a pour expression

$$\tfrac{1}{6}\pi \overline{AC}^2 \times x;$$

d'ailleurs

$$\overline{AC}^2 = AB \times AD = 2Rx;$$

donc

$$\text{vol. seg. AMC} = \tfrac{1}{6}\pi . 2Rx . x = \tfrac{1}{3}\pi R x^2.$$

Le volume de la sphère engendrée par le demi-cercle AMB est

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3;$$

on aura donc

$$\tfrac{1}{3}\pi R x^2 = \tfrac{1}{2} . \tfrac{4}{3}\pi R^3, \quad \text{ou} \quad x^2 = 2R^2,$$

c'est-à-dire

$$x = R\sqrt{2}.$$

On voit que la projection de la corde AC est égale au côté du carré inscrit dans le cercle considéré. On déduit de là, pour obtenir la position de la corde AC, la construction indiquée sur la figure. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 354.)

355. *Solution n° I.* On a

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. BCDE} - \text{vol. ABD} - \text{vol. ACE};$$

or

$$\text{vol. ABD} = \text{vol. ACE};$$

donc

$$\text{vol. ABC} = \pi\overline{\text{AH}}^2 \times \text{BC} - \tfrac{2}{3}\pi\overline{\text{AH}}^2 \times \text{AD},$$

ou bien

$$\text{vol. ABC} = \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{\text{AH}}^2 \times \text{BC} = 2\pi\text{AH}\,.\,\text{BC}\,\frac{\text{AH}}{3};$$

mais $2\pi\text{AH}\,.\,\text{BC}$ représente la surface engendrée par la base BC du triangle; donc

$$\text{vol. ABC} = \text{surf. BC} \times \frac{\text{AH}}{3}.$$

Solution n° II.

$$321^\circ\,22' = 60' \times 321 + 22' = 60''(60 \times 321 + 22) = 1156920'',$$

$$27^\circ\,21'\,1'' = 60'\,(27 + 21' + 1'') = 60''\,(60 \times 27 + 21 + 1'')$$
$$= 98461''.$$

Le rapport demandé est donc égal à

$$\frac{1156920}{98461} = 11{,}75. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 355.)

356. On a pour le volume engendré

$$\text{V} = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{AD}}^2\,.\,\text{BD} + \tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{AD}}^2\,.\,\text{DC} = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{AD}}^2\,.\,\text{BC};$$

mais

$$\text{AD}\,.\,\text{BC} = bc,$$

d'où

$$\text{AD} = \frac{bc}{\text{BC}} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

En substituant, il vient

$$\text{V} = \tfrac{1}{3}\pi\,\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

On a, pour l'application,

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \frac{36 \times 64}{\sqrt{36+64}} = \tfrac{1}{3}\pi \frac{38 \times 64}{10} = 1{,}2 \times 64\pi = 241^{mc},275. \text{ (S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 356.)

357. $$V = \text{surf. } BC \times \frac{AI}{3} = 2\pi AI \times BC \times \frac{AI}{3};$$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi BC \times \overline{AI}^2;$$

or,

$$\overline{AI}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BI}^2 = 81 - 9 = 72;$$

donc

$$V = \tfrac{2}{3}\pi \times 6 \times 72 = 288\pi = 904^{mc},780800. \text{ (S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 357.)

358. $$S = 2\pi MK \times MN;$$

or

$$MK = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OK}^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3};$$

donc

$$S = 2\pi\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \times \pi = 21^{mq},7650. \text{ (S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 358.)

359. Le volume engendré par le parallélogramme tournant autour du côté AB est équivalent au volume engendré par le rectangle CEDF tournant autour du même côté AB. Il a donc pour expression

$$\pi \times \overline{CE}^2 \times CD = V.$$

De même le volume engendré par le parallélogramme tournant autour du côté BD a pour expression

$$\pi \times \overline{CH}^2 \times AC = V'.$$

On a donc le rapport demandé

$$\frac{V'}{V} = \frac{\pi \times \overline{CE}^2 \times CD}{\pi \times \overline{CH}^2 \times AC} = \frac{CE \times CE \times CD}{CH \times CH \times AC}.$$

Or

$$CE \times CD = CH \times AC;$$

d'où

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{CD} = \frac{BD}{AB}. \quad \text{Donc} \quad \frac{V}{V'} = \frac{CE}{CH} = \frac{BD}{AB}. \quad \text{(S.)}$$

Les volumes sont en raison inverse des côtés autour desquels s'effectuent les rotations. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 359.)

360. vol. ABCD = vol. LCK — vol. LBA — vol. ADK,

$$\text{vol. LCK} = \tfrac{1}{3}\pi\,\text{AC} \times \text{CK} \times \text{CL},$$
$$\text{vol. LBA} = \tfrac{1}{3}\pi\,\text{BM} \times \text{BL} \times \text{AB},$$
$$\text{vol. ADK} = \tfrac{1}{3}\pi\,\text{DH} \times \text{DK} \times \text{AD},$$

$$\text{AC} = \sqrt{\overline{\text{AD}}^2 + \overline{\text{CD}}^2} = 5,$$

$$\text{DK} = \frac{\overline{\text{AD}}^2}{\text{CD}} = \frac{16}{3}, \quad \text{CK} = \text{CD} + \text{DK} = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3},$$

$$\text{BL} = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\text{CB}} = \frac{9}{4}, \quad \text{CL} = \text{CB} + \text{BL} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4},$$

$$\text{DH} = \frac{\text{AD} \times \text{DK}}{\sqrt{\overline{\text{AD}}^2 + \overline{\text{DK}}^2}} = \frac{16}{5}, \quad \text{BM} = \frac{\text{AB} \times \text{BL}}{\sqrt{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BL}}^2}} = \frac{9}{5}.$$

Effectuant, on a

$$\text{V} = 60\pi = 188\ ,495559. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 360.)

361. Soit x la distance CO, y la demi-corde DE. Le volume engendré par le triangle DCO est celui d'un cône; on a donc

(1) $$\text{vol. tr. DCO} = \tfrac{1}{3}\pi\, xy^2.$$

Le volume engendré par le segment DMAC a pour expression

(2) $$\text{vol. segm. DMAC} = \tfrac{1}{6}\pi\,(\text{R} - x)^3 + \tfrac{1}{2}\pi y^2\,(\text{R} - x).$$

L'équation du problème s'obtient en égalant les expressions (1) et (2); on a donc

$$\tfrac{1}{3}\pi\, xy^2 = \tfrac{1}{6}\pi\,(\text{R} - x)^3 + \tfrac{1}{2}\pi\, y^2\,(\text{R} - x);$$

chassant les dénominateurs et le facteur π,

$$2xy^2 = (\text{R} - x)^3 + 3y^2\,(\text{R} - x).$$

Mettant $\text{R} - x$ en facteur dans le second membre,

(3) $$2xy^2 = (\text{R} - x)\,[(\text{R} - x)^2 + 3\,y^2],$$

et, si l'on remarque que le triangle rectangle DCO donne

(4) $$y^2 = \text{R}^2 - x^2 = (\text{R} - x) \times (\text{R} + x),$$

il vient, en divisant membre à membre les égalités (3) et (4),

$$2x = \frac{(R - x^2) + 3y^2}{R + x} = \frac{(R - x)^2 + 3R^2 - 3x^2}{R + x},$$

d'où

$$2x(R + x) = R^2 - 2Rx + x^2 + 3R^2 - 3x^2,$$

et, après réduction et simplification,

$$x^2 + Rx - R^2 = 0.$$

En résolvant on trouve

$$x = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2}.$$

La racine négative n'étant pas admissible, il vient

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad \text{(S.)}$$

c'est-à-dire que la longueur x est moyenne et extrême raison du rayon donné, ou, en d'autres termes, x est le côté du décagone inscrit. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 361.)

362. Soient x et y les deux côtés demandés, z la hauteur abaissée sur l'hypoténuse. Le volume engendré par la rotation du triangle rectangle autour de l'hypoténuse est

$$V = \tfrac{1}{3}\pi a z^2.$$

D'autre part, le volume d'une sphère de rayon b est $\frac{4}{3}\pi b^3$, d'où l'équation

$$\tfrac{1}{3}\pi a z^2 = \tfrac{4}{3}\pi b^3,$$

et après simplification

$$a z^2 = 4b^3,$$

d'où enfin

$$x^2 = \frac{4b^3}{a} \quad \text{et} \quad z = \frac{26}{a}\sqrt{ab}.$$

Le triangle rectangle a pour expression du double de sa surface az, ou encore xy, d'où l'équation

(1) $$xy = az = 2b\sqrt{ab}.$$

D'ailleurs on a la relation

(2) $$x^2 + y^2 = a^2.$$

Les équations (1) et (2) donnent, si l'on additionne le double de xy à $x^2 + y^2$,

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 4b\sqrt{ab},$$

d'où

$$(3) \qquad x + y = \sqrt{a^2 + 46\sqrt{ab}}.$$

Pareillement, si l'on retranche de l'équation (2) le double de l'équation (1), il vient

$$(4) \qquad x - y = \sqrt{a^2 - 4b\sqrt{ab}}$$

et, en prenant la demi-différence de ces mêmes équations,

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - 4b\sqrt{ab}} - \sqrt{a^2 - 4b\sqrt{ab}}\right).$$

On remarquera que les valeurs de x et de y sont symétriques. D'ailleurs les racines ne sont réelles que si l'on a

$$a^2 > 4b\sqrt{ab} \quad \text{ou} \quad a > 2b\sqrt[3]{2}.$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 362.)

363. Soit $a =$ DE le côté du pentagone, si l'on joint DA, on aura, en appelant C la longueur DA,

$$C = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

parce que c'est le côté du décagone inscrit. Mais on sait que la relation qui unit C et a est la suivante:

$$C^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)$$

d'où

$$a^2 = \frac{C^2(4R^2 - C^2)}{R^2}$$

et, si l'on remplace C par sa valeur, il vient, après réduction,

$$a = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} = CD = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Calculons maintenant

$$CA = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{C^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Or

$$C^2 = \frac{R}{4}(6 - 2\sqrt{5}) \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{4} = \frac{R^2}{16}(10 - 2\sqrt{5});$$

donc

$$CA = \sqrt{4R^2(6 - 2\sqrt{5}) - R^2(10 - 2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{R}{4}\sqrt{4(6 - 2\sqrt{5}) - (10 - 2\sqrt{5})},$$

ou enfin

$$CA = \frac{R}{4}\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}.$$

D'autre part on a

$$\text{vol. segm. AMDC} = \tfrac{1}{6}\pi CA^3 + \tfrac{1}{2}\pi CD^2 \times CA$$
$$= \frac{\pi CA}{6}(CA^2 + 3CD^2),$$

ou, en substituant,

$$\text{vol.} = \frac{\pi}{6} \times \frac{R}{4}\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}\left[\frac{R}{16}(14 - 6\sqrt{5}) + \frac{3R^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})\right];$$

mettant $\frac{R^2}{16}$ en facteur et effectuant,

$$\text{vol.} = \frac{\pi}{6} \times \frac{R}{4}\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \times \frac{R^2}{4}(11 - 3\sqrt{5})$$
$$= \frac{\pi R^3}{96}(11 - 3\sqrt{5})\sqrt{14 - 6\sqrt{5}},$$

ou en faisant pénétrer $11 - 3\sqrt{5}$ sous le radical, et effectuant le produit, on a

$$\frac{\pi R^3}{96}\sqrt{4304 - 1920\sqrt{5}};$$

simplifiant par 4, c'est-à-dire par 16 sous le radical,

$$\text{vol.} = \frac{\pi R^3}{24}\sqrt{269 - 120\sqrt{5}} \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 363.)

364. Soient $KO = x$ et $KE = y$, on a

$$\text{vol. GDCEF} = \tfrac{2}{3}\pi y(R^2 + x^2 + Rx),$$
$$\text{vol. GDEF} = 2\pi x^2 y,$$

donc

$$\text{vol. DCE} = \tfrac{2}{3}\pi y\,(R^2 + x^2 + Rx) - 2\pi x^2 y.$$

L'équation du problème est donc

$$\tfrac{2}{3}\pi y\,(R^2 + x^2 + Rx) - 2\pi x^2 y = 2\pi x^2 y,$$

ou

$$\tfrac{1}{3}(R^2 + x^2 + Rx) = 2x^2,$$

$$R^2 + x^2 + Rx = 6x^2,$$

ou enfin

$$5x^2 - Rx - R^2 = 0,$$

équation d'où l'on tire

$$x = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 20R^2}}{10} = \frac{R(1 \pm \sqrt{21})}{10}.$$

La valeur de x doit être positive et moindre que R; on doit donc rejeter la valeur donnée par la racine négative et écrire

$$x = R\left(\frac{1 + \sqrt{21}}{10}\right).$$

Effectuant, on trouve approximativement

$$x = 0{,}558\,R. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 364.)

365. Le volume engendré par le rectangle est égal à la somme des volumes engendrés par les deux triangles BAC et BDC; et l'on sait que le volume engendré par un de ces triangles s'obtient en multipliant la surface que décrit le côté opposé à l'axe par le tiers de la hauteur correspondante. On a donc

$$\text{vol. ABCD} = \text{vol. ABC} + \text{vol. BDC},$$

$$\text{vol. ABC} = \text{surf. AB} \times \tfrac{1}{3}b = \pi(\text{AI} + \text{BC})\,a \times \tfrac{1}{3}b,$$

$$\text{vol. BDC} = \text{surf. BD} \times \tfrac{1}{3}a = \pi(\text{DH} + \text{BC})\,b \times \tfrac{1}{3}a.$$

Faisant la somme, et mettant en facteur $\frac{\pi}{3}ab$,

$$(1) \qquad \text{vol. ABCD} = \frac{\pi}{3}ab\,(\text{AI} + \text{DH} + 2\text{BC}).$$

Pour évaluer AI et DH, on remarquera que les triangles sem-

blables AIC, BAC et CDH donnent

$$\frac{AI}{b} = \frac{b}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AI = \frac{b^2}{BC},$$

$$\frac{DH}{a} = \frac{a}{BC}, \quad \text{d'où} \quad DH = \frac{a^2}{BC}.$$

L'équation (1) devient donc

$$\text{vol. ABCD} = \frac{\pi}{3} ab \frac{(b^2 + a^2 + 2\overline{BC}^2)}{BC};$$

or

$$BC = \sqrt{a^2 - b^2};$$

donc

$$\text{vol. ABCD} = \frac{\pi}{3} ab \times \frac{b^2 + a^2 + 2(b^2 + a^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\pi ab (a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

si l'on multiplie haut et bas par $\sqrt{a^2 + b^2}$, il vient enfin, après réduction,

$$\text{vol. ABCD} = \pi ab \sqrt{a^2 + b^2}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 365.)

366. Posons $AB = y$, $AC = x$, et soit z la perpendiculaire AD abaissée sur l'hypoténuse a.

On sait que le volume engendré par ABC tournant autour de a est égal à la surface engendrée par l'un des côtés x, multiplié par le tiers de la hauteur correspondante y : d'où

$$\text{vol. ABC} = \text{surf. AC} \times \frac{y}{3} = \pi zx \times \frac{y}{3}.$$

Mais, d'après l'énoncé, ce volume vaut

$$\frac{4}{3} \pi R^3,$$

d'où

(1) $$xyz = 4R^3.$$

D'ailleurs, le double de la surface du triangle est az ou xy, d'où

(2) $$xy = az,$$

et enfin, le triangle étant rectangle,

(3) $$x^2 + y = a^2.$$

L'équation (1) donne

$$z = \frac{4R^3}{xy},$$

valeur qui, reportée dans l'équation (2), fournit la relation

$$(4) \qquad x^2y^2 = 4aR^3 \text{ ou } 2xy = 4R\sqrt{aR}$$

Ajoutons et retranchons membre à membre (3) et (4), il vient

$$(x+y)^2 = a^2 + 4R\sqrt{aR}, \quad (x-y)^2 = a^2 - 4R\sqrt{aR},$$

d'où

$$x+y = \pm\sqrt{a^2 + 4R\sqrt{aR}}, \quad x-y = \pm\sqrt{a^2 - 4R\sqrt{aR}}.$$

Les solutions négatives étant inadmissibles, on a définitivement

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4R\sqrt{aR}}\right) + \sqrt{a^2 - 4R\sqrt{aR}}, \quad (S.)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4R\sqrt{aR}}\right) - \sqrt{a^2 - 4R\sqrt{aR}}. \quad (S.)$$

Le problème n'est possible que si x et y sont réels; d'où la condition

$$a^2 \geqslant 4R\sqrt{aR} \quad \text{ou} \quad a \geqslant 2R\sqrt{2}.$$

Pour $a = 2R\sqrt{2}$, le triangle devient isoscèle. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 366.)

367. Le volume engendré par le segment de cercle AMB tournant autour du diamètre CD est égal à $\frac{1}{6}$ du cercle qui aurait pour rayon la corde AB du segment multiplié par la projection A′B′ de cette corde sur le diamètre. (Démonstration dans tous les traités de Géométrie.) (*Voy.* ATLAS, *fig.* 367.)

368. Soient $y = \text{EI}$ la hauteur du triangle CDE, $x = \text{EK}$ la hauteur du triangle AEB. On a

$$(1) \qquad x + y = +y = h.$$

De plus, les triangles semblables CDE, EAB donnent

$$(2) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} = \frac{h}{a+b}$$

et enfin

$$x = \frac{ah}{a+b}, \quad y = \frac{bh}{a+b}.$$

On en tire

$$\text{surf. CDE} = \frac{b}{2}, \quad y = \frac{b^2 h}{2(a+b)},$$

$$\text{surf. AEB} = \frac{a}{2}, \quad x = \frac{a^2 h}{2(a+b)},$$

$$\text{surf. (CDE + AEB)} = \frac{h(a^2+b^2)}{2(a+b)},$$

$$\text{surf. (AEB — CED)} = \frac{h(a^2-b^2)}{2(a+b)} = \frac{h(a-b)}{2}.$$

Le volume engendré par la rotation des deux triangles autour de AB s'obtiendra en appliquant le théorème de Guldin. (Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe est égal à cette surface multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.) Si donc on appelle G et G′ les centres de gravité des deux triangles,

$$\text{vol. AEB} = \text{surf. AEB} \times 2\pi \text{GM}.$$

Mais

$$\text{GM} = \frac{\text{EK}}{3} = \frac{x}{3} = \frac{ah}{3(a+b)}.$$

Donc

$$\text{vol. AEB} = \frac{a^2 h}{2(a+b)} \times \frac{ah}{3(a+b)} \times 2\pi = \frac{\pi a^3 h^2}{3(a+b)^2}.$$

Pareillement

$$\text{vol. CED} = \text{surf. CED} \times 2\pi \text{G'H}.$$

Or

$$\text{G'H} = \text{NH} - \text{G'N} = h - \frac{y}{3} = h - \frac{bh}{3(a+b)} = \frac{(3a+2b)h}{3(a+b)};$$

donc

$$\text{vol. CED} = \frac{b^2 h}{2(a+b)} \times 2\pi \frac{(3a+2b)h}{3(a+b)} = \frac{\pi b^3 h^2 (3a+2b)}{3(a+b)^2}.$$

La somme de ces volumes est donnée par l'expression

$$\frac{\pi h^2}{3(a+b)^2}[a^3 + b^2(3a+2b)].$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 368.)

369. Soient $BC = a$, $AB = x$, $AC = y$.

Les volumes engendrés par le triangle ABC, tournant autour de AB et de AC, ont pour expressions respectives

$$\tfrac{1}{3}\pi y^2 x \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{3}\pi y x^2.$$

D'après l'énoncé du problème, on a donc

$$\tfrac{1}{3}\pi y^2 x = \tfrac{2}{3}\pi y x^2,$$

ou

$$(1) \qquad y^2 x = 2 y x^2.$$

A cette équation il faut joindre la relation

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

De (1) on tire

$$xy\,(y - 2x) = 0,$$

et, comme x et y ne sont pas nuls, il en résulte

$$y = 2x.$$

Par suite, l'équation (2) donne

$$x^2 \times 4x^2 = a^2,$$

d'où

$$x^2 = \frac{a^2}{5} \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5},$$

$$y = 2x = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 369.)

370. Le volume engendré par le triangle ABC, en tournant autour de l'axe XY, est égal à l'excès de la somme des deux troncs de cône engendrés par ABFE et AEGC sur le cylindre qu'engendre BCGF.

Observant que la somme des deux troncs de cône est double de l'un d'eux, on a, d'après l'énoncé,

$$\frac{2\pi\,DC}{3}\left(\overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 + AE + CG\right) - \pi\,\overline{ED}^2 \times BC = \tfrac{4}{3}\pi a^3,$$

ou réduisant

$$2DC\left(\overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 + AE \times CG\right) - 3\,\overline{DE}^2 \times BC = 4a^3\,;$$

mais

$$BC = a,\ DC = \frac{a}{2},\ CG = x,\ AE = AD + DE = \frac{a\sqrt{3}}{2} + x.$$

Si nous remplaçons les lettres par leurs valeurs, nous aurons

$$\frac{2a}{2}\left[\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+x\right)^2 + x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+x\right)\right] - 3ax^2 = 4a^2,$$

ou

$$\frac{3a^2}{4} + \frac{2a\sqrt{3}x}{2} + x^2 + x^2 + \frac{a\sqrt{3}x}{2} + x^2 - 3x^2 = 4a^2,$$

ou encore

$$3a^2 + 4a\sqrt{3}x + 2a\sqrt{3}x = 16a^2.$$

Résolvant par rapport à x, il vient définitivement

$$x = \frac{13a^2}{6a\sqrt{3}} = \frac{13a}{6\sqrt{3}} = \frac{13a\sqrt{3}}{18}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 370.)

371. La somme des volumes engendrés par les segments de cercle AMB, ANC égale la différence entre la sphère ayant BC pour diamètre et le volume engendré par le triangle BAC.

Or on a pour la sphère

$$\frac{\pi a^3}{6},$$

et pour le volume BAC

$$\frac{\pi x^2 BD}{3} + \frac{\pi x^2 DC}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi a x^2}{3}.$$

Donc, d'après l'énoncé,

$$\frac{\pi a^3}{6} - \frac{\pi a x^2}{3} = \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

ou, réductions faites,

$$a^3 - 2ax^2 = 8R^3,$$

d'où enfin

$$x = \sqrt{\frac{a^3 - 8R^3}{2a}}. \quad (S.)$$

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$a^3 - 8R^3 \geqslant 0, \quad \text{d'où} \quad a^2 \geqslant 8R^2.$$

Si nous extrayons la racine cubique, il nous vient définitivement pour la condition de possibilité

$$a \geqq 2\,\mathrm{R}.$$

$\frac{a}{2}$ est le maximum de R ; la valeur correspondante de x est 0.

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 371.)

372. Observons d'abord que, l'angle CAO étant égal à 45°, les points B et C sont les milieux des demi-circonférences AMO AND.

$$\text{vol. AMBCN} = \text{vol. ANC} - \text{vol. AMB};$$

mais

$$\text{vol. ANC} = \frac{\pi\,\overline{\mathrm{AC}}^2 \times \mathrm{AO}}{6}$$

et

$$\text{vol. AMB} = \frac{\pi\,\overline{\mathrm{AB}}^2 \times \mathrm{AO}'}{6}.$$

Or

$$\mathrm{AO} = 2a, \qquad \mathrm{AO}' = a,$$

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 2\,\overline{\mathrm{AO}}^2 = 2.4a^2 = 8a^2, \qquad \overline{\mathrm{AB}}^2 = 2\,\overline{\mathrm{AO}'}^2 = 2a^2;$$

substituant, il vient

$$\text{vol. ANC} = \frac{\pi 8a^2 2a}{6} = \frac{8\pi a^3}{3},$$

$$\text{vol. AMB} = \frac{\pi 2a^2 a}{6} = \frac{\pi a^3}{3},$$

d'où

$$\text{vol. AMBCN} = \frac{8\pi a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{3} = \frac{7\pi a^3}{3}. \quad \text{(S.)}$$

Considérant le volume engendré par chacun des segments ANC, AMB comme la différence entre une demi-sphère et un cône, on reconnaît que ce volume est égal au quart de la sphère correspondante, ce qui fournit une solution simple. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 372.)

373. Le volume engendré par le segment circulaire AMB tournant autour de AC a pour expression

$$\tfrac{1}{6}\,\pi\,\overline{\mathrm{AB}}^2.\ \mathrm{AD}.$$

Donc l'énoncé donne

$$\tfrac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2 . AD = \tfrac{9}{16} . \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

ou

$$2\,\overline{AB}^2 . AD = 9R^3.$$

Soit α l'angle BAD On aura

$$AD = AB \cos\alpha,$$

et aussi, dans le triangle rectangle ABC,

$$AB = 2R \cos\alpha,$$

d'où il résulte

$$AD = 2R \cos^2\alpha.$$

L'équation donnée devient donc

$$2.4R^2 \cos^2\alpha . 2R \cos^2\alpha = 9R^3,$$

ou

$$16R^3 \cos^4\alpha = 9R^3 \quad \text{ou} \quad \cos^4\alpha = \tfrac{9}{16},$$

ce qui donne

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'angle α est donc un angle de 30°. (S.)

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 373.)

374. D'après l'énoncé,

$$\frac{\pi\,\overline{AC}^2 . AI}{6} + \frac{\pi\,\overline{CB}^2 . BI}{6} = \frac{5}{8}\,\frac{4\pi R^3}{3},$$

ou, réduisant,

$$\overline{AC}^2 . AI + \overline{CB}^2 . BI = 5R^3,$$

soit

$$AI = x, \quad \text{d'où} \quad BI = 2R - x.$$

On a

$$\overline{AC}^2 = 2Rx, \quad \overline{BC}^2 = 2R(2R - x);$$

substituant,

$$2Rx^2 + 2R(2R - x)^2 = 5R^3;$$

d'où, toutes réductions faites,

$$4x^2 - 8Rx + 3R^2 = 0;$$

d'où enfin

$$x = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2 - 12R^2}}{4} = \frac{4R \pm 2R}{4} = \frac{2R \pm R}{2}.$$

Les racines sont

$$AI = \frac{R}{2}, \quad (S.) \quad AI' = \frac{3R}{2}. \quad (S.)$$

Ces deux solutions ne sont pas distinctes.

Plus simplement :

Il résulte de l'énoncé que le volume engendré par le triangle ACB est les $\frac{3}{8}$ du volume de la sphère. On a donc

$$\pi \overline{CI}^2 . 2R = \frac{3}{8} \cdot \frac{4\pi R^3}{3},$$

d'où immédiatement

$$\overline{CI}^2 = \frac{3R^2}{4} \quad \text{et} \quad CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

CD est le côté du triangle équilatéral inscrit, d'où

$$x = \frac{R}{2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 374.)

375. Surface demandée

$$(1) \qquad S = \pi (BO + CD)\, BD.$$

Or

$$BO = 1^m,5,$$

$$CD = \frac{BO}{2} = 0^m,75,$$

$$BD = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 1,5^2}}{2},$$

car les triangles semblables ADC et ABO donnent

$$\frac{AC}{AO} = \frac{DC}{BO} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Substituant dans l'équation (1), il vient

$$S = 3,1416\,(1,5 + 0,75) = \frac{\sqrt{2^2 + 1,5^2}}{2}.$$

Effectuant, on trouve

$$S = 8^{mq},835750. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 375.)

3° PROBLÈMES SUR LA SPHÈRE.

376. Lorsque les deux observateurs cessent de s'apercevoir, ils sont aux extrémités d'une tangente O′O″ longue de 12600 mètres, dont le point de contact T est le milieu. Nous aurons donc

$$O'T^2 = O'A \times O'B,$$

$$6300^2 = 3(2x + 3),$$

d'où l'on tire

$$x = 6614998 \text{ mètres.} \quad (S)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 376.)

377. On sait qu'une zone a pour mesure le produit de la circonférence de la sphère par sa hauteur; ici la hauteur de la zone est égale à

$$\tfrac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) R,$$

ce qu'on voit en écrivant que le produit des segments du diamètre est égal au carré de la demi-corde (elle est le sinus 30° $\frac{1}{2}$ R).

La surface cherchée 3 sera donc égale à

$$S = 2\pi R \times \tfrac{1}{2} R\left(2 - \sqrt{3}\right) = \pi R^2\left(2 - \sqrt{3}\right) = 8^{mq},952. \quad (S.)$$

378. Appelons

α la distance du petit cercle au pôle,
R le rayon de la sphère terrestre,
l la longueur de la circonférence terrestre,
S la surface de la zone.

Nous aurons

$$S = 4\pi R^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha;$$

mais

$$R = \frac{l}{2\pi},$$

ce qui donne

$$S = \frac{l^2}{\pi} \sin^2 \frac{1}{2}\alpha.$$

En remplaçant l et α par leurs valeurs,

$$S = 211204 \text{ myriamètres carrés.} \quad (S.)$$

379. Soit D le diamètre de la sphère; on sait que les surfaces des zones sont entre elles comme leurs hauteurs : il faut donc diviser D en trois parties proportionnelles à m, n et p; en sorte que, si y, x, z représentent les trois parties, nous aurons

$$x = \frac{mD}{m+n+p},$$

$$y = \frac{nD}{m+n+p},$$

$$z = \frac{pD}{m+n+p}.$$

380. Désignons par x la hauteur de la zone, par R le rayon de la sphère à laquelle elle appartient, la surface de la zone est

$$2\pi R \times x = 25^{mq},26.$$

Le volume de la sphère est

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = 405^{mc},230.$$

De ces équations on tire

$$x = \frac{25,26}{2\pi R},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \times 405,230}{4\pi}},$$

$$\pi = \frac{25,26}{2\pi\sqrt[3]{\frac{3 \quad 405,230}{4\pi}}} = 1^{m},752. \quad (S.)$$

381. Soient S la surface d'une zone, H sa hauteur et R le rayon de la sphère à laquelle elle appartient; nous savons que

$$S = 2\pi RH,$$

d'où

$$R = \frac{3}{2\pi H}.$$

Si donc on veut calculer le volume V de la sphère, on sait que

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\frac{S^3}{\pi^2 H^3}.$$

Remplaçant S et H par leurs valeurs numériques,

$$V = 1^{mc},3015. \quad (S.)$$

382. Si la corde AB a 2 mètres, elle est égale au rayon R; c'est donc le côté de l'hexagone régulier inscrit et sa distance au centre est

$$OK = \tfrac{1}{2} R \sqrt{3}.$$

La surface engendrée S est celle d'un cylindre ayant pour rayon la base OK et pour hauteur AB. Ainsi

$$S = 2\pi \times \tfrac{1}{2} R \sqrt{3} \times R = \pi R^2 \sqrt{3},$$

$$S = 4\pi \sqrt{3} = 21^{mq},7655. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 382.)

383. Soient O le centre d'une sphère de rayon R, OA un rayon de cette sphère, MP la perpendiculaire élevée au milieu de ce rayon; trouver un point S tel que la surface du cône SP soit égale à celle de la calotte AP. Posons

$$SM = x.$$

La surface de la zone est πR^2, celle du cône est

$$\pi \times PM \times PS;$$

or PM est la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit.

$$PM = \tfrac{1}{2} R \sqrt{3};$$

d'ailleurs

$$SP = \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{4} R^2};$$

on doit donc avoir

$$\tfrac{1}{2}\pi R \sqrt{3} \times \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{4} R^2} = \pi R^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \tfrac{1}{2} R \sqrt{\frac{7}{3}}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 383.)

384. Appelons R le rayon du cercle, H la hauteur de la zone; nous voulons avoir

$$S = 2\pi RH = \tfrac{1}{2}\pi R^2$$

ou

$$H = \tfrac{1}{4}R.$$

Mais H n'est autre chose que DH, c'est-à-dire R — OH;

$$H = R - OH = R - R\cos\tfrac{1}{2}O.$$

Remplaçant H par cette valeur, nous avons

$$R\left(1 - \cos\tfrac{1}{2}O\right) = \tfrac{1}{4}R,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}O = \tfrac{3}{4},$$
$$\tfrac{1}{2}O = 41^\circ\,24'\,34'',$$
$$O = 82^\circ\,49'\,9'',26. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 384.)

385. Soient h et h' les distances des deux bases de la zone au centre de la sphère, r et r' les rayons de ces cercles, et R le rayon de la sphère, nous aurons

Surf. de la zone. . . . . $S = 2\pi R(h' - h) = 25^{mq},1327,$
Surf. de la grande base. $\pi(R^2 - h^2) = 37^{mq},6991,$
Surf. de la petite base. $\pi(R^2 - h'^2) = 21^{mq},9911.$

386. La surface d'une sphère a pour expression

$$S = 4\pi R^2;$$

remplaçant le rayon par sa valeur,

$$S = 0^{mq},5542. \quad (S.)$$

387. Appelons S la surface totale du cylindre circonscrit, s celle de la sphère et s' celle du cône circonscrit.

Le cylindre a pour rayon de base le rayon R de la sphère et pour hauteur 2R : donc

$$S = 2\pi R \times 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

Le cône a pour rayon de base $R\sqrt{3}$, pour hauteur 3R; on a donc

$$s' = \pi \times B\sqrt{3} \times 2R\sqrt{3} + \pi \times (R\sqrt{3})^2 = 9\pi R^2.$$

D'ailleurs

$$s = 4\pi R^2.$$

On voit donc bien que

$$S^2 = ss'. \quad (S.)$$

388. Soient CHD et AIB deux polygones pris dans les conditions supposées, nous aurons

$$\text{surf. AIB} = 2\pi \times \text{OI} \times 2\text{R} = 4\pi\text{R} \times \text{OI},$$
$$\text{surf. sphère} = 4\pi\text{R} \times \text{R},$$
$$\text{surf. CHD} = 2\pi\text{OH} \times \text{CD} = 2\pi\text{R} \times \text{CD} = 4\pi\text{R} \times \text{CO}.$$

Or les triangles semblables OAI, OCH donnent

$$\frac{\text{CO}}{\text{OH}} = \frac{\text{OA}}{\text{OI}},$$

c'est-à-dire

$$\text{R}^2 = \text{CO} \times \text{OI};$$

donc on a bien le résultat énoncé. (*Voy.* Atlas, *fig.* 388.)

389. Appelons V le volume du cylindre, v et v' ceux de la sphère et du cône; nous reportant aux valeurs données pour les éléments de ces corps au problème 387, nous voyons que

$$\text{V} = \pi\text{R}^2 \times 2\text{R} = 2\pi\text{R}^3,$$
$$v = \tfrac{4}{3}\pi\text{R}^3,$$
$$v' = \tfrac{1}{3} \times 3\pi\text{R}^2 \times 3\text{R} = 3\pi\text{R}^3;$$

donc

$$\text{V}^2 = vv'. \quad (S.)$$

390. Du centre O de la sphère, abaissons des perpendiculaires OC et OC′ sur les plans MNP, RMQ; les points C et C′ seront les centres des cercles MNP, MQR. Les lignes CM, C′M seront donc respectivement perpendiculaires aux tangentes MX, MY.

Or, CO étant perpendiculaire au plan MNP et CM étant perpendiculaire sur MX, la ligne OM sera perpendiculaire sur MX (théorèmes des trois perpendiculaires). De même OM sera perpendiculaire à MY. Donc la droite OM est perpendiculaire au plan MY. (*Voy.* Atlas, *fig.* 390.)

391. La surface d'une zone est

$$S = 2\pi\text{RH}.$$

Dans le cas qui nous occupe, H est la différence entre les sinus de 66° 30′ et 23° 30′.

$$H = R\,(\sin 66^\circ 30' - \sin 23^\circ 30').$$

On a donc

$$S = 2\pi R^2\,(\sin 66^\circ 30' - \sin 23^\circ 30')$$

et le rapport cherché

$$\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\,(\sin 66^\circ 30' - \sin 23^\circ 30') = 0{,}259155. \quad (S.)$$

392. Soit AOB l'angle donné; le volume du secteur est égal à la surface de la zone

$$S = 2\pi RH,$$

multipliée par $\frac{1}{3}$ du rayon.

$$V = S \times \tfrac{1}{3} R = \tfrac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Mais

$$H = AC = OA - OC = R - R\cos AOB = R \times 2\sin^2 \tfrac{1}{2} AOB,$$

donc

$$V = 32\pi \sin^2 27^\circ 14' = 7^{dc},017. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 392.)

393. La formule qui donne la surface d'une zone est

$$S = 2\pi RH,$$

dans laquelle H représente la hauteur, R le rayon de la sphère; pour calculer R, nous avons

$$45^2 = 32\,(2R - 32),$$

d'où

$$R = \frac{3049}{64}.$$

Ainsi

$$S = 2\pi \times \frac{3049}{64} \times 32 = \pi \times 3049 = 9578^{mmq},7384. \quad (S.)$$

394. Soient R et r les rayons des deux sphères, nous aurons

$$R - r = 1{,}75.$$

$$\tfrac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3) = 47,$$

$$\frac{4}{3}\pi\,(R^2 + Rr + r^2) = \frac{47}{1{,}75}.$$

Mais

$$R = r + 1,75,$$

$$\frac{4}{3}\pi(3r^2 + 5,25\pi + 3,0625) = \frac{47}{1,75},$$

d'où

$$r = 0,497. \quad (S.)$$

$$R = 2,247. \quad (S.)$$

395. Le rayon du parallèle de 48° 50′ est égal au rayon de la Terre, multiplié par cos 48° 50′; le parallèle entier vaut donc

$$40000000 \times \cos 48° 50',$$

et l'arc de 3° 36′ de ce parallèle vaut donc

$$40000000 \times \cos 48° 50' \times \frac{3° 36}{360°} = 263306^m. \quad (S.)$$

396. Soit x la hauteur cherchée et y le rayon de la base du cône. La surface de la sphère

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi.$$

La surface du cône

$$S' = 2\pi y \times \frac{R}{2} = \pi y.$$

On a donc

$$\pi y = 0,4 \times \pi,$$

d'ailleurs

$$x^2 + y^2 = 1,$$

d'où l'on tire

$$x = 0,916. \quad (S.)$$

$$y = 0,4. \quad (S.)$$

397. Soit α l'angle cherché, le volume du secteur, en appelant H la hauteur de la zone, est

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^2 H;$$

mais, comme au problème précédent,

$$H = 2R \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Egalant donc le volume du secteur au quart de la sphère, soit à $\frac{1}{3}\pi R^3$, nous aurons

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\alpha}{2} = 30°,$$

$$\alpha = 60°. \quad (S.)$$

398. Soient AB, CD les deux plans sécants. Il s'agit de déterminer la distance $EO = x$ de l'un d'eux au centre.

D'après l'énoncé,

$$2\pi\overline{AE}^2 = 2\pi REF.$$

Or

$$AE^2 = R^2 - x^2 \quad \text{et} \quad EF = 2x;$$

substituant, il vient

$$R^2 - x^2 = 2Rx;$$

d'où successivement

$$x^2 + 2Rx - R^2 = 0.$$

$$x = -R \pm \sqrt{R^2 + R^2} = -R \pm R\sqrt{2}.$$

La racine négative doit être rejetée. Il reste

$$x = R(\sqrt{2} - 1).$$

Construction géométrique. — Mener deux diamètres perpendiculaires MN, PQ, joindre PN et rabattre PN en PF. On a

$$OF = PN - PO = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1) = x. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 398.)

399. Désignons par X le diamètre de la sphère, on a

$$V = 1^{dmc}\frac{1}{6}\pi\left(\frac{X}{1^{dm}}\right)^3,$$

et par suite

$$P = 1^{kg}\frac{1}{6}\pi\left(\frac{X}{1^{dm}}\right)^3 10,474.$$

D'après cela, l'équation du problème est

$$\frac{1}{6}\pi\left(\frac{X}{1^{dm}}\right)^3 10,474 = 1,250.$$

$$\left(\frac{X}{1^{dm}}\right)^3 = \frac{6 \times 1,250}{3,1416 \times 10,474}.$$

De cette équation on tire, au moyen des logarithmes, la valeur $\frac{X}{2}$ du rayon de la sphère; ce rayon est $x = 0^{dm},18$. (S.)

400. $AO = CO = R = 7^m$;

$mO = 5^m$, $nO = 3^m$;

$Am = x$, $x^2 = R^2 - mO^2$;

$Cn = y$, $y^2 = R^2 - \overline{nO}^2$;

$mn = h = 2^m$.

La surface de la zone étant $2\pi R h$, on aura, en remplaçant R par 7 et h par 2,

$$\text{surf. zone} = 2\pi R h = 2\pi \times 7 \times 2 = 28\pi = 87^{mq},9648.$$

La petite base est $\pi(7^2 - 5^2) = 24\pi = 75^{mq},3984$.

La grande base $= \pi(7^2 - 3^2) = 40\pi = 125^{mq},6640$.

Le volume du segment sphérique est

$$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi x^2 h + \pi y^2 h}{2}.$$

En posant $h = 2$, et remplaçant πx^2 et πy^2 par les valeurs trouvées plus haut, on a

$$\text{segm. sph.} = 4^{mc},1888 + 75^{mc},3984 + 125^{mc},6640,$$

vol. segm. sph. $= 205^{mc},2512$. (S.)

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 400).

401. La surface d'une zone s'obtient en multipliant la hauteur de cette zone par la circonférence d'un grand cercle; tout se réduit donc à chercher la hauteur IP de cette zone. Or, le point I étant le milieu de l'arc CC', CI est bissectrice de l'angle PCA. On a donc

(1) $$\frac{IP}{IA} = \frac{CP}{CA}.$$

Mais les triangles semblables CPA, COA donnent

$$(2) \qquad \frac{CP}{CA} = \frac{OC}{OA}.$$

La comparaison de (1) et (2) donne

$$\frac{IP}{IA} = \frac{OC}{OA},$$

d'où

$$(3) \qquad IP = \frac{IA.OC}{OA} = \frac{RH}{R+H}.$$

L'expression de la surface de la zone sera donc

$$2\pi R \times IP = 2\pi R^2 \frac{H}{R+H}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 401.)

402. Le volume du segment sphérique à une base ADBC a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\pi \overline{AD}^2 \times CD + \tfrac{1}{6}\pi \overline{CD}^3$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\pi CD\left(\overline{Ah}^2 + \tfrac{1}{3}\overline{CD}^2\right).$$

Or

$$\overline{Ah}^2 = CD \times C'D = \frac{R}{2} \times \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}.$$

De là

$$V = \frac{1}{2}\pi\frac{R}{2}\left(\frac{3R^2}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{R^2}{4}\right) = \frac{1}{16}\pi R^3\left(3 + \frac{1}{3}\right),$$

ou

$$V = \tfrac{5}{24}\pi R^3,$$

$$R = 10;$$

donc

$$R^3 = 1000;$$

donc

$$V = 654^{mc},498. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 402.)

403. 1° En désignant respectivement par S, h, r la surface d'une zone, sa hauteur et le rayon de la sphère à laquelle elle appartient, on a

$$S = 2\pi rh, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{S}{2\pi h}.$$

Le volume de la sphère ayant pour expression

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

on aura ici

$$V = \frac{S^3}{6\pi^2 h^3}.$$

Pour $S = 2^m$, $h = 0,4$, on trouve

$$V = 2^{mc},110858 \quad (S.)$$

2° L'expression du volume d'un segment sphérique à une base peut se mettre aisément sous la forme (Roucné et Comberousse, *Géométrie*, t. II, p. 511)

$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

Ici

$$r = \frac{S}{2\pi h};$$

on aura donc

$$V = \frac{Sh}{2} - \frac{\pi h^3}{3}.$$

Pour $S = 2^m$, $h = 0^m, 4$; on obtient

$$V = 0^{mc},332979. \quad (S.)$$

404. Soient AB le petit cercle donné, P et P′ ses deux pôles.

Appelons V et V′ les volumes respectifs des deux cônes dont les sommets sont en P et P′, et R le rayon de la sphère.

On a

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\,\overline{AO}^2 \times PO,$$
$$V' = \tfrac{1}{3}\pi\,\overline{AO}^2 \times P'O.$$

Le volume de la sphère étant $\frac{4}{3}\pi R^3$, on a, en désignant par m et n les deux rapports cherchés,

$$m = \frac{\frac{1}{3}\pi\,\overline{AO}^2 \times PO}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\overline{AO}^2 \times PO}{4R^3}$$

et

$$n = \frac{\frac{1}{3}\pi\,\overline{AO}^2 \times P'O}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\overline{AO}^2 \times P'O}{4R^3}.$$

Les deux parties dans lesquelles le petit cercle donné divise la

surface de la sphère sont deux zones qui ont respectivement pour surfaces

$$2\pi R \times PO \quad \text{et} \quad 2\pi R \times P'O.$$

On a donc

$$\frac{2\pi R \times PO}{2\pi R \times P'O} = \frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{PO}{P'O} = \frac{1}{3};$$

et par suite

$$PO = \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad P'O = \frac{3R}{2}.$$

D'ailleurs un théorème connu du troisième Livre donne

$$\overline{AO}^2 = PO \times P'O = \frac{3R^2}{4}.$$

On aura donc

$$m = \frac{\frac{3R^2}{4} \times \frac{R}{2}}{4R^3} = \frac{\frac{3R^3}{8}}{4R^3} = \frac{3}{32} = \frac{3}{2^5}$$

et

$$n = \frac{\frac{3R^2}{4} \times \frac{3R}{2}}{4R^3} = \frac{\frac{9R^3}{8}}{4R^3} = \frac{9}{32} = \frac{3^2}{2^5}.$$

Remarque. La somme des volumes des deux cônes est les $\frac{3}{8}$ du volume de la sphère. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 404.)

405. Données :

$$OA = OF = OD = 7^m, \quad OC = 3^m, \quad OB = 5^m.$$

$$\text{zone } ED = 2\pi RH = 2\pi \times OA \times BC = 2\pi \times 7^m \times 2^m$$
$$= \pi \times 28^{mq} = 87^{mq},964594. \quad (S.)$$

$$\text{cercle } CD = \pi \overline{CD}^2 = \pi(\overline{OD}^2 - \overline{OC}^2) = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9)$$
$$= \pi \times 40^{mq} = 3,14159265... \times 40 = 125^{mq},663706.$$

$$\text{cercle } BF = \pi \overline{BF}^2 = \pi(\overline{OF}^2 - \overline{OB}^2) = \pi(7^2 - 5^2)$$
$$= \pi(49 - 25) = \pi \times 24^{mq} = 3,14159265... \times 24^{mq} = 75^{mq}398223.$$

$$\text{vol. segment} = \tfrac{1}{2}\pi BC\left(\overline{CD}^2 + \overline{BF}^2\right) + \tfrac{1}{3}\pi \overline{BC}^3$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi(40 + 24)\,2 + \tfrac{1}{6}\pi \times 8 = \pi \times 64 + \tfrac{4}{3}\pi = 65^{mc}\tfrac{1}{3} \times \pi$$
$$= \tfrac{196}{3}\pi = \frac{615^{mc},752169103}{3} = 205^{mc},250720034. \quad (S.)$$

Pour ce dernier calcul, on est obligé de prendre

$$\pi = 3,141592653589....$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 405.)

406. Soit R le rayon de la sphère et $OI = x$. On aura la valeur du segment

$$ACB = \tfrac{1}{6}\pi\overline{IC}^3 + \tfrac{1}{2}\pi\overline{IB}^2 \times IC$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi(R-x)^3 + \tfrac{1}{2}\pi(R^2-x^2)(R-x)$$

Volume du cône

$$ADB = \tfrac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x).$$

On a alors l'équation

$$\tfrac{1}{6}\pi(R-x)^3 + \tfrac{1}{2}\pi(R^2-x^2)(R-x)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x)$$

ou

$$(R-x)^3 + 3(R^2-x^2)(R-x)$$
$$= 2(R^2-x^2)(R+x).$$

Divisant tous les termes par $R-x$, effectuant les calculs et réduisant, on trouve

$$2x^2 + 3Rx - R^2 = 0.$$

Résolvant,

$$x = \frac{-3R \pm \sqrt{9R^2+8R^2}}{4} = \frac{R}{4}(-3 \pm \sqrt{17})$$
$$= \frac{R}{4} \times (-3 \pm 4,12) = \frac{R}{4}(1,12).$$

La valeur négative doit être rejetée. On trouve ainsi

$$x = R \times 0,28 = 0^m,28, \quad (S.)$$

en faisant $R = 1^m$. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 406.)

407. Désignant par R le rayon de la Terre, on a pour la surface S demandée

$$S = 2\pi R.OH;$$

mais

$$OH = OD \cos HOD = R \cos 45° = \frac{R\sqrt{2}}{2};$$

remplaçant OH par cette valeur, il vient

$$S = \frac{2\pi R^2 \sqrt{2}}{2} = \pi R^2 \sqrt{2};$$

d'autre part, d'après l'énoncé,

$$2\pi R = 40000^{km},$$

d'où

$$R = \frac{20000}{\pi}, \quad R^2 = \frac{400\,000\,000}{\pi^2},$$

et enfin

$$S = \frac{\pi . 400\,000\,000 \sqrt{2}}{\pi^2} = \frac{400\,000\,000 \sqrt{2}}{\pi};$$

effectuant les calculs, on trouve

$$S = 180\,063\,300^{kmq}$$

par excès, à moins d'une unité de l'ordre du dernier chiffre significatif. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 407.)

408. On a

$$OC = 3, \ OH = 2,$$

d'où

$$CH = OC - OH = 1.$$

Or on a

$$\text{surf. zone ABDE} = 2\pi r \times CH = 2\pi r \times 1.$$

Mais r, le rayon de la sphère, vaut 4. Donc on a

$$\text{zone} = 2 \times 3{,}14159 \times 4 = 25^{mq}{,}13272. \quad (S.)$$

Les deux cercles de base ont pour expression

$$\pi \overline{AC}^2 \quad \text{et} \quad \pi \overline{DH}^2.$$

Mais les triangles rectangles ACO, DHO donnent

$$\overline{AC}^2 = r^2 - CO^2 = 16 - 9 = 7,$$

$$\overline{DH}^2 = r^2 - \overline{HO}^2 = 16 - 4 = 12.$$

Donc

$$\text{cercle AB} = 3{,}14159 \times 7 = 21^{mq}{,}99113, \quad (S.)$$

$$\text{cercle DE} = 3{,}14159 \times 12 = 37^{mq}{,}69908. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 408.)

409. Soit a l'arête du cube, R le rayon de la sphère.

On sait que dans un parallélépipède rectangle le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés des trois arêtes.

On a donc

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$$

ou

$$4R^2 = 3a^2 \quad \text{et} \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Mais le volume de la sphère vaut

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2};$$

substituant aux lettres les valeurs numériques

$$V = \frac{3.1415926 \times \overline{0,25}^3 \times 1,7320508}{2} = 0^{mc},042\,509671. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 409.)

410. La surface totale du cône SFG a pour expression

$$\pi.OF.SF + \pi\overline{OF}^2.$$

On aura donc

$$\pi.OF.SF + \pi\overline{OF}^2 = \pi a^2.$$

Soit $OS = x$; les triangles SOD et SOF semblables donnent

$$\frac{x}{SF} = \frac{R}{OF} = \frac{SD}{x}.$$

D'ailleurs

$$\overline{SD}^2 = x^2 - R^2.$$

Par conséquent

$$\frac{x^2}{SF^2} = \frac{R^2}{OF^2} = \frac{x^2 - R^2}{x^2}.$$

On en déduit

$$\overline{SF}^2 = \frac{x^2}{x^2 - R^2}$$

et

$$\overline{OF}^2 = \frac{R^2x^2}{x^2 - R^2}.$$

Donc

$$\frac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}} \times \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} + \frac{R^2x^2}{x^2 - R^2} = a^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{Rx^3}{x^2 - R^2} + \frac{R^2x^2}{x^2 - R^2} = a^2.$$

Il en résulte

$$Rx^2(x+R) = a^2(x^2 - R^2),$$

ou, en supprimant la solution $x = -R$, qui ne saurait convenir à la question, il vient

$$Rx^2 = a^2(x - R),$$

et enfin

$$Rx^2 - a^2x + a^2R = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2R^2}}{2R} = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4R^2}}{2R}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$a^2 - 4R^2 > 0 \quad \text{ou} \quad \pi a^2 > 4\pi R^2.$$

La surface du cercle donné doit donc être supérieure à la surface totale de la sphère de rayon R. Son minimum est cette surface même, et l'on a dans ce cas

$$x = \frac{a^2}{2R}.$$

Dans le cas général, il y a deux solutions qui sont toutes deux admissibles et qui sont équidistantes de la solution correspondant au minimum. Celle-ci se construit facilement en prenant la corde $AI = a$ et abaissant la perpendiculaire IP sur AB; on a ainsi

$$\overline{AI}^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = 2R \times AP;$$

donc

$$AP = \frac{a^2}{2R} = x. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 410.)

411. Désignant AC par x et DC par y, on a, d'après l'énoncé

$$2\pi Rx = \pi y \,.\, DB;$$

mais, dans le triangle rectangle ADB,

$$DB = \sqrt{2R(2R - x)}$$

et

$$y = \sqrt{x(2R - x)};$$

substituant,

$$2Rx = \sqrt{x(2R - x)}\,\sqrt{2R(2R - x)} = \sqrt{2Rx(2R - x)^2}.$$

Élevant au carré

$$4R^2x^2 = 2Rx(2R - x)^2;$$

simplifiant et développant,

$$2Rx = (2R - x)^2 = 4R^2 - 4Rx + x^2,$$

d'où

$$x^2 - 6Rx + 4R^2 = 0,$$

d'où enfin

$$x = 3R \pm \sqrt{9R^2 - 4R^2} = 3R \pm R\sqrt{5}.$$

Le signe + doit être rejeté, parce que x ne peut surpasser le rayon. Donc

$$x = R(3 - \sqrt{5}). \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 411.)

412. Le volume du segment DAE a pour expression, en désignant AC par x,

$$\tfrac{1}{3}\pi x^2(3R - x).$$

Celui du secteur sphérique DOE a de même pour expression

$$\tfrac{2}{3}\pi R^2 x.$$

On aura donc, d'après l'énoncé,

$$\frac{\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)}{\frac{2}{3}\pi R^2 x} = m,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x(3R - x)}{2R^2} = m,$$

ou enfin

$$x^2 - 3Rx + 2mR^2 = 0.$$

On en tire

$$x = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 8mR^2}}{2} = \frac{R(3 \pm \sqrt{9 - 8m})}{2}. \quad (S.)$$

Pour que le problème soit possible, il faut que les racines soient réelles, c'est-à-dire que l'on ait $m < \frac{9}{8}$. Ce rapport est donc le plus grand possible, et pour la valeur $m = \frac{9}{8}$ on a

$$x = \frac{3R}{2}.$$

Cela posé, pour que les deux racines, qui sont positives, soient

admissibles, il faut que la valeur de la plus grande soit inférieure à 2R, ce qui donne la condition

$$\frac{3+\sqrt{9-8m}}{2} < 2 \quad \text{ou} \quad 3+\sqrt{9-8m} < 4,$$

ou enfin

$$\sqrt{9-8m} < 1 \quad \text{et} \quad 9-8m < 1,$$

ce qui donne $m > 1$.

Donc, pour qu'il y ait deux solutions de la question, il faut et il suffit que m soit compris entre $\frac{9}{8}$ et 1. Si m est $> \frac{9}{8}$ il n'y a plus de solution réelle et si m est < 1, il n'y a qu'une solution admissible. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 412.)

4° PROBLÈMES DIVERS.

413. Le volume engendré par le segment AMD a pour expression

$$\frac{\pi\,\overline{AD}^2 \times AC}{6}.$$

Le volume engendré par le triangle CBD est

$$\frac{\pi\,\overline{DC}^2 \times BC}{3}.$$

D'après l'énoncé,

$$\frac{\pi\,\overline{AD}^2 \times AC}{6} = \frac{\pi\,\overline{DC}^2 \times BC}{6},$$

soit $AC = x$. On a

$$\overline{AD}^2 = 2Rx, \quad \overline{DC}^2 = x(2R - x).$$

Substituant, il vient

$$2Rx^2 = x(2R - x)^2.$$

$x = 0$ satisfait à l'équation. Supprimant cette solution,

$$2Rx = (2R - x)^2 = 4R^2 - 4Rx + x^2,$$

d'où

$$x^2 - 6Rx + 4R^2 = 0,$$

d'où enfin

$$x = 3R \pm \sqrt{9R^2 - 4R^2} = 3R \pm R\sqrt{5}.$$

On doit avoir $x < 2R$ et *a fortiori* $x < 3R$. Le signe — convient donc seul définitivement.

$$x = R(3 - \sqrt{5}). \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 413.)

414. On a

$$\text{vol. AMD} = \frac{\pi \overline{AD}^2 \times AC}{6},$$

$$\text{vol. DNB} = \frac{\pi \overline{BD}^2 + BC}{6}.$$

D'après l'énoncé,

$$\frac{\pi AD^2 \times AC \,.\, 6}{\pi \,.\, 6 \,.\, \overline{BD}^2 \times BC} = \frac{1}{4};$$

mais, d'après un théorème connu,

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{AC}{BC};$$

donc

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Désignant AC par x, il vient

$$\frac{x}{2R - x} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{x}{2R} = \frac{1}{3},$$

d'où enfin

$$x = \frac{2R}{3}. \quad \text{(S.)}$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 414.)

415.

$$\text{vol. AMC} = \frac{\pi \overline{AC}^2 \times AE}{6},$$

$$\text{vol. CDN} = \frac{\pi \overline{CD}^2 \times EF}{6}.$$

On a donc, en appelant K le rapport cherché,

$$K = \frac{\text{vol. AMC}}{\text{vol. CND}} = \frac{\pi \overline{AC}^2 \times AE \times 6}{6.\pi \overline{CD}^2 \times EF} = \frac{\overline{AC}^2 \times AE}{\overline{CD}^2 \times EF};$$

mais

$$AC = R,\ AE = \frac{R}{2},\ CD = R,\ EF = R,$$

d'où

$$K = \frac{R^2 \times R}{2 \times R^2 \times R} = \frac{1}{2}. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 415.)

416.

$$\text{vol. AOH} = \frac{\pi \overline{AO}^2 \times OH}{3},$$

$$\text{vol. EHD} = \frac{\pi \overline{ED}^2 \times EH}{3},$$

d'où, par le rapport K demandé,

$$K = \frac{\pi \overline{AO}^2 \times OH \times 3}{3\pi \overline{ED}^2 \times EH};$$

mais

$$AO = R,\ ED = \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad \frac{OH}{EH} = \frac{AO}{ED} = \frac{R}{\frac{R}{2}} = 2;$$

donc

$$k = \frac{R^2 \times 2}{\frac{R^2}{4}} = 8. \quad (S.)$$

(*Voy.* ATLAS, *fig.* 416.)

Remarque. Ce résultat s'aperçoit immédiatement, car la base du cône engendré par AOH est quatre fois celle du cône qu'engendre le triangle EHD, puisque AO = 2ED, et, d'autre part, la hauteur HO du premier cône est double de la hauteur EH du second. Donc le cône AOH est huit fois le cône EHD.

FIN.

APPENDICE.

Nous croyons devoir donner, avec discussion et dans le cas le plus général, les solutions de quelques-uns des problèmes précédents (nos 56, 109, 236, 241, 246 et 247).

56. Soient, de grandeur et de position, AB la base donnée, $2c$ sa longueur, MN la droite indéfinie sur laquelle doit se trouver le sommet du triangle, $2l$ la somme des deux autres côtés AC, BC du triangle cherché. (*Voy.* ATLAS, *Pl. XXII, fig.* 56 *bis* et 56 *ter.*)

Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle demandé; du sommet C, abaissons CD perpendiculaire à la base AB.

Pour construire le triangle cherché, il suffira donc, soit de connaître la position du point D sur AB, et, en ce point, d'élever une perpendiculaire sur AB, jusqu'à sa rencontre en C avec la droite donnée MN, soit de connaître la hauteur CH et de mener, à une distance égale à cette hauteur, une parallèle à AB qui coupera la ligne MN au point cherché C.

A cet effet, soit E le milieu de AB, et menons la médiane CE.

Le triangle CDE donne la relation

$$(1) \qquad \overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{DE}^2,$$

et le triangle ABC, les relations

$$(2) \qquad \overline{CE}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\right) - \tfrac{1}{4}\,\overline{AB}^2$$

et

$$(3) \qquad 2AB \,.\, DE = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2.$$

[illegible] les [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{BC})(\overline{AC} + \overline{BC}),$$

$$(\overline{AC} - \overline{BC})(\overline{AC} + \overline{BC}) = \overline{AB}^2,$$

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC} + \overline{BC}}.$$

[illegible]

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2(\overline{AC} + \overline{BC})};$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [

$\overline{CMD}$ est donné, nous voyons qu'en joignant ces deux relations à l'équation (8), nous aurions un système de trois équations, d'où nous pourrions tirer, soit la valeur de la hauteur CD, soit la valeur de DE ou de ME, qui servirait à déterminer la position du point D sur la droite AB.

Mais il est préférable, et plus conforme à l'esprit géométrique, d'interpréter l'équation (8) et d'en déduire une construction géométrique.

Reprenons donc l'équation (8)

$$\overline{CD}^2 = (l^2 - \overline{DE}^2)\frac{l^2 - c^2}{l^2},$$

et, après avoir pris les racines carrées des deux membres, mettons-la sous la forme

$$(9) \qquad \frac{CD}{\sqrt{l^2 - \overline{DE}^2}} = \frac{\sqrt{l^2 - c^2}}{l}.$$

Du point E comme centre, avec un rayon EF égal à r, décrivons une demi-circonférence FGF', qui coupera CD en C', et joignons C'E.

Dans le triangle rectangle C'DE, on a

$$\overline{C'D}^2 = \overline{C'E}^2 - \overline{DE}^2 = l^2 - \overline{DE}^2,$$

d'où

$$(10) \qquad C'D = \sqrt{l^2 - \overline{DE}^2},$$

et par suite

$$(11) \qquad \frac{CD}{\sqrt{c^2 - \overline{DE}^2}} = \frac{CD}{C'D}.$$

Du point B comme centre, avec le même rayon égal à r, décrivons un arc de cercle qui coupe en H le rayon EG perpendiculaire à AB, et joignons HB.

Dans le triangle rectangle HEB, nous avons

$$\overline{HE}^2 = \overline{HB}^2 - \overline{EB}^2 = l^2 - c^2,$$

d'où

$$(12) \qquad HE = \sqrt{l^2 - c^2},$$

et par suite

$$(13 \qquad \frac{\sqrt{l^2 - c^2}}{l} = \frac{HE}{GE},$$

et l'équation (9), en ayant égard aux équations (11) et (13), nous donnera la relation

$$(14) \qquad \frac{CD}{C'D} = \frac{HE}{GE},$$

entre les lignes de la figure CD, C'D, HE et GE.

Par le point M, point de rencontre de la ligne MN avec la droite AB, et par le point C', menons une droite indéfinie MN'; puis par le point G, une parallèle GH à AB, jusqu'à la rencontre de MN' en L; enfin par le point L menons LK perpendiculaire à AB. Cette perpendiculaire coupe MN en I.

Les lignes C'D et LK étant parallèles, comme perpendiculaires à la même droite AB, sont coupées en parties proportionnelles par le faisceau des droites AB, MN et MN' issues du même point M.

Nous avons donc la relation

$$(15) \qquad \frac{CD}{C'D} = \frac{IK}{LK},$$

et par suite

$$(16) \qquad \frac{IK}{LK} = \frac{HE}{GE};$$

mais

$$LK = GE$$

comme côtés parallèles du rectangle GEKL; par conséquent

$$(17) \qquad HE = IK.$$

Donc HI est parallèle à AB, puisque ses deux points H et I sont à égales distances de AB.

Les points H et G étant déterminés à l'aide des données, comme nous l'avons vu plus haut, on obtiendra le point I en menant HI parallèle à AB, jusqu'à sa rencontre en I avec la droite donnée MN.

Puis, en menant IK perpendiculaire à AB, jusqu'à sa rencontre en L avec la parallèle GL à AB menée par le point G, on déterminera le point L de la droite MN'. Cette dernière droite, tracée en joignant le point M au point L, donnera par son intersection avec le cercle FGF' la position du point C'.

Finalement, on obtiendra le point C, en abaissant du point C'

une perpendiculaire C'D sur AB ; le point C se trouvera à la rencontre de cette perpendiculaire avec la droite donnée MN.

Il y aura deux solutions si la droite MN' est sécante au cercle, une seule si elle est tangente.

Il n'y en aura point si la droite MN' est extérieure en tous ses points au cercle.

On peut, *à priori*, savoir si les données comportent une ou deux solutions, ou si le problème est impossible.

En effet, soient (*fig.* 36 *ter*) AB la base donnée et MN la droite sur laquelle doit se trouver le sommet C. Prenons sur MN un point quelconque C, et traçons le triangle ABC. Du point B, abaissons une perpendiculaire BD sur MN, et prolongeons-la, de l'autre côté de MN, d'une longueur DB' égale à celle de BD. Menons des droites CB' et AB'. CB' est évidemment égal à CB. Dans le triangle ACB', nous avons par conséquent

$$AC + CB' = AC + CB.$$

Dans le même triangle, nous avons aussi

$$AC + CB' > AB'.$$

Or AB' est une donnée implicite de la question, et, puisque la somme des côtés AC + CB, ou son égale AC + CB', doit être égale à $2l$, la dernière relation nous donne l'inégalité de condition

$$2l \geqslant AB',$$

qui doit exister entre la donnée explicite $2l$ et la donnée implicite AB' pour que le problème soit possible.

Il en résulte que, si l'on a

1° $$2l > AB',$$

le problème comportera deux solutions qui correspondront à deux positions du point C situées sur la droite MN, de part et d'autre de la droite AB'.

2° Si

$$2l = AB',$$

la solution sera unique et le sommet du triangle sera à l'intersection des droites MN et AB'.

3° Enfin, si

$$2l < AB',$$

il n'y aura pas de solution possible.

Dans le cas où la droite MN ne rencontrerait pas la droite AB dans l'étendue de la figure, le point M ferait défaut pour le tracé de la droite MN. Il faudrait alors déterminer un second point L' de la droite MN' : ce que l'on ferait en répétant la construction du point L, mais en prenant pour point de départ un rayon incliné EG' convenablement choisi, comme l'indique la figure.

109. Soient MN la droite indéfinie donnée, E, F, G, H les points de cette droite en lesquels les côtés prolongés du carré demandé la rencontrent. (*Voy.* ATLAS, *Pl. XXII*, *fig.* 109 *bis* et 109 *ter.*)

Supposons le problème résolu, et soit ABCD le carré demandé, dont les côtés AC, BD, CD et AB passent respectivement par les points E, F, G, H.

Pour tracer ce carré, il suffira de déterminer la position du sommet A, car on obtiendra les positions des autres sommets en menant les droites AE et AH, puis, par les points F et G, les droites FB et GC, respectivement parallèles à AE et AH.

Pour déterminer le point A, nous remarquons d'abord que, le triangle EAH étant rectangle en A, son sommet A est situé sur la circonférence de cercle décrite sur EH comme diamètre. En traçant donc ce cercle, on aura un premier lieu géométrique sur lequel se trouve le sommet A.

Nous remarquons encore que, la ligne AD étant une diagonale du carré, cette droite est, en même temps, la bissectrice de l'angle droit A. Elle passe donc par le point L, milieu de la demi-circonférence décrite sur EH comme diamètre ; or ce point L est connu.

Il suffira donc de déterminer un s cond point de la diagonale AD pour pouvoir la tracer et obtenir ainsi un second lieu géométrique sur lequel le point A devra se trouver.

Soit P le point où la diagonale AD rencontre la droite MN, et menons par le sommet D du carré cherché une droite IDK parallèle à MN.

Les triangles EAP et PAH, coupés par la droite IDK parallèles à leurs bases, donnent la relation

$$\frac{ID}{EP}=\frac{AD}{AP}=\frac{DK}{PH},$$

d'où

$$\frac{EP}{PH}=\frac{ID'}{DK}=\frac{EF}{GH},$$

car ID est égal à EF comme côtés opposés du parallélogramme EIDF : pareillement, DK est égal à GH, par la même raison, dans le parallélogramme GDKH ; or EF et GH sont connus, puisque les points E, F, G, H sont donnés sur la droite MN.

On déterminera donc le point P de la diagonale AD prolongée en divisant la longueur EH dans le rapport des longueurs EF et GH.

Ayant les points L et P de la diagonale prolongée, on tracera cette droite, et sa seconde intersection avec le cercle décrit sur EH comme diamètre donnera le point cherché A; la construction s'achèvera comme il a été dit plus haut.

Il convient de faire observer que, le point L pouvant être pris indifféremment en L ou en L', sur l'une ou l'autre des demi-circonférences dont EH est le diamètre commun, on aura une seconde solution du problème en joignant L'P par une droite qui rencontrera la circonférence du cercle en A'. Le carré A'B'C'D', ainsi obtenu, sera symétrique du premier par rapport à MN.

Nous remarquerons encore que nous avons supposé, dans la *fig.* 109 *bis*, que la droite MN rencontrait les côtés du carré en des points de leurs prolongements. Il en résulte un certain ordre de succession des côtés du carré dans leur croisement avec la droite MN. Dans le cas de la *fig.* 109 *bis*, les côtés parallèles AC et BD sont rencontrés les premiers, puis ensuite les deux autres CD et AB; ajoutons que les quatre sommets de ce carré sont, dans ce cas, situés du même côté de la droite MN.

Mais si nous supposons la droite MN menée de façon à laisser les sommets A, C, B d'un même côté, et le quatrième sommet D de l'autre côté de la droite, telle que celle-ci serait dans la position M'N' de la *fig.* 109 *ter*, les côtés du carré seront alors

rencontrés dans l'ordre de leur succession sur le périmètre du carré AG, CD, BD, AB.

Il en résulte que, si nous représentons par les mêmes lettres E, F, G et H les points de rencontre de la droite avec les mêmes côtés dans ses deux positions MN et M'N', ces points se succéderont dans l'ordre E, F, G, H sur MN et l'ordre E, G, F, H sur M'N'.

Cet ordre serait successsivement E, G, H, F sur M''N'', G, E, H, F sur M'''N''', et enfin G, H, E, F sur $M^{IV}N^{IV}$, M''N'', M'''N''', $M^{IV}N^{IV}$ représentant les positions successives de la droite MN, tracée de façon à laisser successivement deux, trois ou les quatre sommets du même côté que le sommet D est situé relativement à la position M'N' de la droite MN.

Il y aura donc lieu, dans l'indication des données, de bien distinguer : 1° les points E et H qui se rapportent aux côtés de l'angle A, ces points déterminant sur MN, de grandeur et de position, le diamètre du cercle à décrire ; 2° les points F et G se rapportant aux deux autres côtés du carré, le rapport des longueurs EF et GH, qui en dépendent, servant à déterminer la position du point P sur la ligne EH, point nécessaire pour le tracé de la bissectrice AD.

236. En multipliant l'une par l'autre les deux relations

$$\frac{GM}{GR} = \frac{R}{R'}$$

et

$$GM.GR = GA'.GB',$$

on obtient

$$\overline{GM}^2 = GA'.GB' \times \frac{R}{R'}.$$

Mais on voit par la *fig.* 236 que, dans le triangle AOG, la droite A'O' étant parallèle à AO, on a

$$\frac{AO}{A'O'} \text{ ou } \frac{R}{R'} = \frac{GA}{GA'},$$

et, en substituant, dans la relation précédente, au rapport $\frac{R}{R'}$ son égal $\frac{GA}{GA'}$, et faisant disparaître, au numérateur et au dénomi-

nateur du second membre, le facteur GA′ qui leur est commun, on aura finalement

$$\overline{GM}^2 = GA.GB'.$$

Donc, pour construire le rayon GM, sur AG comme diamètre, on décrira une demi-circonférence de cercle; au point B′, on élèvera sur AG une perpendiculaire B′D, jusqu'à sa rencontre en D avec cette demi-circonférence, et la corde GD sera le rayon du cercle, lieu des points demandés.

En effet, dans cette demi-circonférence, on a la relation

$$\overline{GD}^2 = GA.GB'$$

entre la corde GD, sa projection GB′ sur le diamètre GA, et ce même diamètre.

241. Tous les points de la parallèle au diamètre AB n'appartiennent pas au lieu.

Ce lieu est limité à une portion de cette parallèle de longueur égale à celle du rayon du cercle, et divisée, en deux également, par le rayon perpendiculaire à la parallèle.

Les extrémités de cette portion de la parallèle correspondent aux positions du point C sur la circonférence du cercle aux extrémités du diamètre AB, ainsi qu'il est facile de le vérifier en effectuant la construction donnée dans l'énoncé pour les extrémités du diamètre AB.

En outre, l'ensemble du lieu se compose de deux lignes symétriquement placées de part et d'autre du diamètre AB. (*Voy.* ATLAS, *fig.* 241.)

242. Il faut remarquer que, si la circonférence de cercle, lieu demandé, vient à couper les cercles donnés, le lieu sera limité aux arcs de cette circonférence dont les points seraient extérieurs, à la fois, aux deux cercles donnés.

Car, évidemment, des autres points de cette circonférence, qui, dans ce cas, seraient intérieurs à l'un, au moins, des cercles donnés, on ne pourrait mener, à la fois, une tangente à l'un et à l'autre cercle.

Il y aurait lieu, cependant, de rechercher la signification de

ces points, et de quelle manière l'énoncé devrait être modifié à leur égard. (Voy. ATLAS, fig. 246.)

247. Il faut remarquer que, si la perpendiculaire à la ligne des centres, lieu demandé, vient à couper l'une des circonférences données, le lieu sera alors limité aux portions de la droite extérieures à la fois aux deux cercles.

Car il est évident que des points de cette perpendiculaire, appartenant à la partie de cette droite intérieure à l'un au moins, des cercles donnés, il serait impossible de mener, à la fois, une tangente à l'un et à l'autre de ces cercles.

Il y aurait lieu, cependant, comme pour le problème précédent, de rechercher la signification de ces points et de quelle manière l'énoncé devrait être modifié à leur égard. (Voy. ATLAS, *fig.* 247.)

FIN DE L'APPENDICE.

TABLE DES MATIÈRES

SOLUTIONS.

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Pages.

Problèmes sur les lignes droites et les angles. 1

CHAPITRE II.

Problèmes sur les triangles.

Démonstrations de propriétés ou constructions géométriques..... 7
Constructions de triangles d'après des conditions données..... 22
Problèmes numériques..... 33

CHAPITRE III.

Problèmes sur les quadrilatères.

Démonstrations de propriétés ou constructions géométriques..... 47
Constructions de quadrilatères d'après des conditions données..... 52
Problèmes numériques sur les quadrilatères..... 55

CHAPITRE IV.

Problèmes sur la circonférence et le cercle.

Constructions de propriétés ou constructions géométriques..... 64
Constructions de circonférences d'après des conditions données..... 74
Problèmes numériques..... 78

CHAPITRE V.

Pages.

Problèmes sur les polygones réguliers. 91

CHAPITRE VI.

Lieux géométriques sur les quatre premiers Livres. 103

CHAPITRE VII.

Problèmes sur le cinquième Livre.

Droites et plans..... 117

CHAPITRE VIII.

Problèmes sur le sixième Livre.

Polyèdres..... 119

CHAPITRE IX.

Problème sur le septième Livre. 132

CHAPITRE X.

Problèmes sur le huitième Livre.

Problèmes sur le cylindre et le cône..... 133
Problèmes sur les volumes et les surfaces de révolution..... 161
Problèmes sur la sphère..... 193
Problèmes divers..... 210

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-76.

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-77

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉES A LA SORBONNE DE 1853 A 1876

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE, DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1846 A 1876,

ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences
et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION.

TROISIÈME PARTIE.

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (THÉORIE ET APPLICATIONS), MAXIMA ET MINIMA (THÉORIE ET QUESTIONS), COURBES USUELLES, GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, COSMOGRAPHIE, MÉCANIQUE.

QUESTIONS.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1877

(Tous droits réservés.)

RECUEIL

DE PROBLÈMES

QUESTIONS.

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

THÉORIE ET APPLICATIONS.

1. La théorie des approximations a un double but :

1° Étant donnée une expression où sont indiquées des opérations, calculer cette expression à moins d'une fraction donnée.

2° Étant donnée une expression où entrent des nombres approchés, indiquer sur quelle approximation on peut compter dans le résultat.

On peut résoudre toutes les questions ayant trait à ce double problème en se servant soit de la méthode des erreurs absolues, soit de la méthode des erreurs relatives.

2. On appelle *erreur absolue* la différence entre le nombre vrai et le nombre approché.

Si le nombre approché est supérieur au nombre exact, l'erreur absolue est *par excès;* si le nombre approché est inférieur, l'erreur absolue est *par défaut*.

3. On appelle *erreur relative* d'un nombre le rapport de l'erreur absolue au nombre exact.

4. Soit, par exemple, le nombre exact 42,53823. Si l'on néglige les deux derniers chiffres décimaux, on néglige une quantité inférieure à 0,001 : par conséquent, on commet une erreur absolue par défaut moindre que 0,001. L'erreur relative correspondante est alors moindre que $\frac{0,001}{42,53823}$, ou, *à fortiori*, que $\frac{1}{35627}$.

Nous allons passer en revue les deux méthodes.

CHAP. I. — ERREURS ABSOLUES.

1° ADDITION.

5. **Théorème.** — *L'erreur absolue d'une somme de plusieurs nombres approchés tous dans le même sens est égale à la somme des erreurs absolues de ces nombres.*

En effet, soient le premier nombre exact A, le nombre approché a, l'erreur α, on aura alors

$$A = a + \alpha;$$

de même, pour un deuxième nombre,

$$B = b + \beta,$$

si le deuxième nombre exact est B, le nombre approché b, et l'erreur β; de même, pour un troisième nombre,

$$C = c + \gamma.$$

Donc, additionnant, on a

$$A + B + C = (a + b + c) + \alpha + \beta + \gamma,$$

ce qui démontre le théorème.

6. **Théorème.** — *L'erreur absolue d'une somme de plusieurs nombres approchés les uns par défaut, les autres par excès, est plus petite que la somme des erreurs absolues de ces nombres.*

En effet, si $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, $C = c - \gamma$, on aura

$$A + B + C = (a + b + c) + (\alpha + \beta - \gamma);$$

$\alpha + \beta - \gamma$, qui constitue l'erreur, est évidemment inférieur à somme des erreurs des parties $\alpha + \beta + \gamma$.

7. **Théorème.** — *L'erreur absolue d'une somme est plus petite*

que la somme des erreurs absolues de ses parties, dans tous les cas, en supposant qu'on remplace les erreurs absolues par leurs limites.

Soit, par exemple, à faire la somme de $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

$\sqrt{2}=1,414$ à moins de 0,001 par défaut,

$\sqrt{3}=1,732$ à moins de 0,001 par défaut,

$\sqrt{5}=2,237$ à moins de 0,001 par excès.

Je dis que la somme $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=1,414+1,732+2,237$ à moins de 0,003, en remplaçant les erreurs commises sur les parties par leurs limites.

Ce théorème est facile à démontrer.

On peut, avec ces théorèmes, résoudre l'un quelconque des deux problèmes suivants.

8. Problème. — *Étant données des quantités susceptibles d'une approximation illimitée, calculer leur somme avec une approximation donnée.*

Soit, par exemple, à calculer à moins de 0,01 la somme $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; je calculerai chacun de ces radicaux jusqu'aux millièmes :

$$\sqrt{2}=1,414,$$
$$\sqrt{3}=1,732,$$
$$\sqrt{5}=2,236.$$

La somme sera 5,382 à moins de 0,003 (voir le n° 7). Donc la somme sera

$$5,38+0,002+\alpha<5,38+0,005,$$

α étant $<0,003$, c'est-à-dire 5,38 par défaut à moins de 0,01.

S'il y avait plus de dix nombres et cent au plus, on se servirait, pour calculer à moins d'un centième, des dix-millièmes, et l'on couperait deux chiffres.

9. Problème. — *Des nombres étant donnés avec une approximation connue, avec quelle approximation peut-on calculer leur somme?*

On connaît les nombres 7,423, 78,5293, 428,0765, chacun à une unité près de l'ordre de leur dernier chiffre; il s'agit de

trouver avec quelle approximation on peut obtenir la somme de ces nombres.

On prendra trois chiffres décimaux à chacun des nombres ; la somme 514,028 sera approchée à moins de 0,003. Donc la somme sera $514,02 + 0,008 + \alpha$; α étant plus petit que 0,003, on prendra 514,03, et l'erreur sera plus petite que 0,002 et, *à fortiori*, que 0,01.

2° SOUSTRACTION.

10. **Théorème.** — *L'erreur absolue d'une différence est, dans tous les cas, inférieure à la somme des erreurs absolues des deux termes, en remplaçant ces dernières par leurs limites.*

Ce théorème, presque évident, se vérifiera sur l'exemple suivant :

On demande de retrancher 12,782 de 14,987, les deux nombres étant évalués à 0,001 près par défaut ou par excès.

Le premier nombre égale..	$14,987 \pm \alpha$,
Le deuxième nombre égale.	$12,782 \pm \beta$,
Et leur différence égale....	$14,987 - 12,782 \pm \alpha \mp \beta$.

Or, α et β étant plus petits que 0,001, leur somme algébrique sera plus petite que 0,002. La différence sera donc 2,205 à 0,002 près, ou 2,20 à 0,01 près, car 0,003 et 0,002 réunis font une somme inférieure à 0,01.

11. Problème. — *Étant donnés deux nombres susceptibles d'une approximation illimitée, calculer leur différence avec une approximation donnée.*

Soit à calculer $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ à 0,01 près par défaut.

Je calcule $\sqrt{3}$ à 0,01 près par défaut : c'est 1,73.

Je calcule $\sqrt{2}$ à 0,01 près par défaut : c'est 1,41.

La différence des deux radicaux sera 0,32 à 0,01 près, car

$$\sqrt{3} = 1,73 + \alpha, \quad \alpha < 0,01;$$
$$\sqrt{2} = 1,41 + \beta, \quad \beta < 0,01;$$
$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1,73 - 1,41 + \alpha - \beta.$$

$\alpha - \beta$ sera évidemment plus petit que 0,01.

12. Problème. — *Deux nombres étant donnés avec une approximation connue, avec quelle approximation peut-on calculer leur différence?*

Soient les nombres 7,428 et 2,1032; ces deux nombres sont donnés à une unité près de l'ordre du dernier chiffre; l'approximation a lieu par défaut ou par excès; le nombre 2,103 sera approché à moins de 0,001, et je le retranche de 7,428, de façon que les deux nombres aient le même nombre de chiffres décimaux. La différence 5,325 exprime la différence cherchée avec une erreur plus petite que 0,002, d'après le n° 10.

Donc la différence sera 5,32 à moins de 0,01.

3° MULTIPLICATION.

13. **Théorème.** — *Dans un produit de deux facteurs dont l'un seulement est approché, l'erreur absolue du produit est égale au produit du facteur exact par l'erreur de l'autre.*

Soit le facteur approché $A = a + \alpha$ et le facteur exact B; je dis que l'erreur absolue du produit est

$$B\alpha;$$

le produit vrai est

$$Ba + B\alpha,$$

le produit approché

$$Ba,$$

l'erreur absolue du produit

$$Ba + B\alpha - Ba = B\alpha.$$

14. **Théorème.** — *Dans un produit de deux facteurs approchés par défaut ou par excès, l'erreur absolue est plus petite que la somme des produits de chaque facteur exact par l'erreur de l'autre, en supposant que l'on remplace ces erreurs par leurs limites supérieures.*

La démonstration de ce théorème comprend trois cas.

Premier cas. — Les deux facteurs sont approchés par défaut.

Soit $A = a + \alpha$ et $B = b + \beta$; je dis que l'erreur absolue du produit est

$$< A\beta + B\alpha;$$

le produit vrai est

$$(a + \alpha)(b + \beta) = ab + b\alpha + a\beta + \alpha\beta,$$

le produit approché

$$ab,$$

l'erreur absolue du produit

$$ab + b\alpha + a\beta + \alpha\beta - ab = a\beta + (b + \beta)\alpha,$$

la somme des produits de chaque facteur par l'erreur de l'autre

$$(a + \alpha)\beta + (b + \beta)\alpha;$$

mais

$$a\beta + (b + \beta)\alpha < (a + \alpha)\beta + (b + \beta)\alpha:$$

donc l'erreur absolue du produit ou $a\beta + (b + \beta)\alpha$ est

$$< A\beta + B\alpha.$$

Deuxième cas. — L'un des facteurs est approché par défaut, l'autre par excès. Le produit vrai est

$$(a + \alpha)(b - \beta) = ab + b\alpha - a\beta - \alpha\beta,$$

le produit approché

$$ab,$$

l'erreur absolue

$$ab + b\alpha - a\beta - \alpha\beta - ab = (b - \beta)\alpha - a\beta,$$

la somme des produits de chaque facteur par l'erreur de l'autre

$$(b - \beta)\alpha + (a + \alpha)\beta;$$

mais

$$(b - \beta)\alpha - a\beta < (b - \ )\alpha + (a + \alpha)\beta:$$

donc l'erreur absolue est

$$(b - \beta)\alpha - a\beta < B\alpha + A\beta.$$

Troisième cas. — Les deux facteurs sont approchés par excès. Soit $A = a - \alpha$ et $B = b - \beta$; le produit exact est

$$ab - a\beta - B\alpha:$$

l'erreur est donc

$$B\alpha + a\beta \quad \text{ou} \quad B\alpha + A\beta + \alpha\beta.$$

Ainsi, dans ce cas, l'erreur est égale à la quantité $B\alpha + A\beta$ augmentée du produit des erreurs absolues $\alpha\beta$. Mais, en remplaçant les erreurs par leurs limites, on démontre facilement que l'erreur du produit, même dans ce cas, sera inférieure à la somme des produits de chaque facteur par l'erreur de l'autre.

Par exemple, soit π et $\sqrt{2}$ que j'évalue à 0,01 près par excès; π sera représenté par 3,15 et $\sqrt{2}$ par 1,42.

Je dis que l'erreur du produit $3,15 \times 1,42$ sera plus petite que $\pi \times 0,01 + \sqrt{2} \times 0,01$, car, d'après la démonstration précédente, l'erreur du produit sera rigoureusement égale à

$$+ (3,1415\ldots)(0,01 - 0,0042\ldots)$$
$$+ (1,4142\ldots)(0,01 - 0,00159\ldots) + \alpha\beta.$$

Or, si je développe, j'aurai

$$\pi . 0,01 - \pi . 0,0042 + \sqrt{2} . 0,01 - \sqrt{2} . 0,00159 + \alpha\beta,$$

c'est-à-dire

$$(\pi . 0,01 + \sqrt{2} . 0,01) - (\pi . 0,0042\ldots + \sqrt{2} . 0,00159 - \alpha\beta);$$

$\alpha\beta$ étant inférieur à $0,01 \times 0,01$, c'est-à-dire à 0,0001, sera évidemment inférieur aux deux premiers termes de la parenthèse. Donc l'erreur sera inférieure à $\pi . 0,01 + \sqrt{2} . 0,01$. C. Q. F. D.

15. Conclusion. — *Dans tous les cas, l'erreur absolue d'un produit de deux facteurs est inférieure à la somme des produits de chaque facteur par l'erreur de l'autre, en remplaçant les erreurs par leurs limites.*

S'il y a lieu, on remplacera les nombres exacts par des nombres approchés par excès. Le théorème subsistera *à fortiori*.

16. Application. — *Dans le produit* $857 \times 3,1415$, *le multiplicande* 857 *est* 857 *à* 1 *près*, *le multiplicateur* 3,1415 *est* 3,1415 *à* 0,0001 *près*; *le produit* 2692,3055 *est* 2692,3055 *à* 0,0857 + 0,3055 + 0,0001 *près*, *c'est-à-dire à* 0,3913 *près*.

cande est exact et le multiplicateur est approché à 0,0001 près par défaut. Avec quelle approximation aura-t-on le produit?

L'erreur sera plus petite que 0,0857 et sera par défaut; le produit de 857 par 3,1415 est égal à 2692,2655. Ce produit représente le nombre cherché avec une erreur inférieure à 0,1; donc le nombre 2692,3 sera égal au nombre vrai diminué d'une quantité inférieure à 0,1 et augmenté d'une quantité 0,0345 inférieure à 0,1, c'est-à-dire au nombre vrai ± une quantité inférieure à 0,1.

On pourra donc compter sur les dixièmes.

17. Application. — *Avec quel degré d'exactitude pourra-t-on avoir le produit des deux nombres 857 et 3248, connus tous deux à une unité près par excès?*

Appliquant le théorème (14) de ce paragraphe, l'erreur du produit sera inférieure à $857 + 3248$, c'est-à-dire à 4105 unités. Ainsi le produit sera approché par excès avec une erreur inférieure à 5000. Je supprimerai donc les quatre derniers chiffres et je les remplacerai par des zéros. Le produit sera exact à une dizaine de mille près.

Le produit des deux nombres donnés est égal à 2783536; le produit cherché est donc égal à $2780000 + 3536 - a$, a étant inférieur à 5000; l'erreur sera donc plus petite qu'une dizaine de mille, et l'on pourra compter sur les trois premiers chiffres.

18. **Théorème.** — *L'erreur absolue d'un produit de plusieurs facteurs approchés est plus petite que la somme des produits de l'erreur de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs.*

Nous démontrerons ce théorème dans le cas de trois facteurs. Il est bien entendu qu'on remplacera les erreurs par leurs limites supérieures, et, s'il y a lieu, les nombres exacts par des valeurs approchées par excès.

Soient A, B, C les nombres exacts et α, β, γ les quantités représentant des limites supérieures des erreurs. L'erreur du produit AB est

$$< A\beta + B\alpha.$$

Dans le produit ABC, si je représente par ε l'erreur absolue du produit AB considéré comme effectué, j'aurai une erreur

$$< C\varepsilon + AB.\gamma;$$

mais

$$\varepsilon < A\beta + B\alpha.$$

J'aurai donc une erreur absolue totale

$$< AC\beta + BC\alpha + AB\gamma. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous allons maintenant résoudre les deux problèmes (nos 19 et 23) auxquels donne lieu la théorie des approximations.

19. Problème. — *Étant donnés deux nombres susceptibles d'une approximation indéfinie, calculer leur produit avec une approximation donnée.*

Cette question se résout à l'aide du procédé particulier de la multiplication abrégée.

MULTIPLICATION ABRÉGÉE.

20. *Règle.* — Pour avoir un produit de deux facteurs à une unité près d'un ordre décimal donné, on écrit le multiplicande comme à l'ordinaire, puis on écrit le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre des unités du multiplicande qui exprime des unités cent fois plus petites que celle qui exprime le degré d'approximation demandé. On écrit ensuite les chiffres du multiplicateur au-dessous des chiffres du multiplicande, mais dans un ordre inverse, c'est-à-dire les dizaines, les centaines à droite, et les dixièmes, centièmes, etc., à gauche. On fait le produit du multiplicande par le premier chiffre à droite du nouveau multiplicateur, en commençant la multiplication au chiffre qui est au-dessus du premier chiffre à droite du multiplicateur; on fait ensuite le produit du multiplicande par le second chiffre à droite du multiplicateur, en commençant la multiplication au chiffre du multiplicande qui est au-dessus du chiffre du multiplicateur, et l'on

écrit ce produit partiel au-dessous du premier, de manière que les derniers chiffres à droite se correspondent, et ainsi de suite.

On fait la somme, on coupe les derniers chiffres de cette somme, on augmente d'une unité, et le résultat exprime le produit avec une erreur inférieure au degré d'approximation demandé.

Soit 3,1415926... à multiplier par 8,3435207... à moins de 0,1.

J'écris le multiplicande au-dessous du chiffre 1, qui exprime des millièmes; comme 8 est le chiffre des plus hautes unités, il n'y aura pas de chiffre à la droite de 8 multiplicateur.

J'écris à sa gauche les chiffres 3, 4, 5 des dixièmes, centièmes, etc.

Je multiplie le nombre 3,141 par 8 et j'écris le produit partiel au-dessous : 25 128.

3,141
5 438
25 128
942
124
15
26 209

Je multiplie 314 par 3 et j'écris le produit partiel 942 au-dessous du premier.

Je multiplie 31 par 4 et j'écris 124 au-dessous des deux autres.

Je multiplie enfin 3 par 5; le produit 15 s'écrit au-dessous des autres, et je fais la somme 26 209; je coupe deux chiffres et j'augmente d'une unité le dernier chiffre conservé; 26,3 exprime le produit à moins de 0,1.

En effet, si nous examinons la marche suivie dans l'opération, le premier produit partiel exprime des millièmes; on a, en effet, multiplié des millièmes par des unités. Le second produit partiel résultant de la multiplication de 314 centièmes par 3 dixièmes exprime encore des millièmes; 942, qui est ce second produit, doit donc s'écrire au-dessous de 25 128 et à la place qu'il occupe.

Le troisième produit partiel exprime de même des millièmes, et le quatrième aussi.

La somme 26 209 exprime donc des millièmes.

J'ai négligé de multiplier 8 par les chiffres à droite du chiffre 1 des millièmes du multiplicande; l'erreur commise sera plus petite que 8 millièmes. Donc l'erreur de cette première multiplication partielle est plus petite que 8 millièmes.

Dans la seconde multiplication partielle, j'ai négligé de multiplier 3 dixièmes par les chiffres 1592, etc., du multiplicande; l'erreur est plus petite que 3 dixièmes multipliés par 1 centième, c'est-à-dire inférieure à 3 millièmes.

Dans la troisième multiplication, j'ai commis une erreur plus petite que 4 millièmes, et enfin dans la dernière j'ai commis une erreur plus petite que 5 millièmes.

Donc, si je fais la somme $8+3+4+5$ des chiffres qui ont servi de multiplicateurs, j'aurai une somme qui exprimera un nombre de millièmes supérieur à l'erreur commise dans ces multiplications.

Ensuite, j'ai négligé complétement les chiffres du multiplicateur à gauche du premier chiffre du multiplicande; l'erreur commise est plus petite qu'une unité de l'ordre des millièmes ou un millième multiplié par 4 unités, 4 étant supérieur au multiplicande. Donc cette seconde erreur est plus petite que 4 millièmes. Ainsi 26209 exprime le nombre de millièmes du produit des deux nombres proposés avec une erreur par défaut plus petite que $(8+3+4+5)+4$ millièmes. Or, dans ce cas comme dans tous les autres où le multiplicateur aura moins de 10 chiffres, l'erreur totale sera inférieure à 10 fois 10 millièmes, c'est-à-dire à 0,1. Donc 26,3 exprime le produit des deux nombres donnés augmenté de 81 millièmes et diminué de 24 millièmes; l'erreur est donc moindre que 0,1.

21. Remarque. — Si le nombre des chiffres du multiplicateur employé surpassait dix, il pourrait se faire que l'erreur provenant des omissions dans le calcul abrégé dépassât 100 unités de l'ordre du dernier chiffre de la somme obtenue. Dans ce cas, on écrirait le chiffre des unités du multiplicateur au-dessous du chiffre des unités du multiplicande, qui exprime des unités mille fois plus petites que celle du degré d'approximation, et les unités de la somme seront celles de l'ordre correspondant.

22. Application. — *On donne* 345,05793 *et* 2,096731. *Combien faut-il conserver de chiffres décimaux à ces deux facteurs pour avoir le produit à* 0,001 *près?*

Il faut en conserver 6 au second et autant au premier, car, le

second servant de multipl cande, il n'y aura besoin que des centmillièmes, et, pour le multiplicateur, on ne conservera que les chiffres nécessaires, qui sont au nombre de six.

23. Problème. — *Deux nombres sont donnés avec une approximation connue; avec quelle approximation peut-on calculer leur produit?*

On se servira des théorèmes démontrés dans ce paragraphe et en particulier du théorème 14.

24. Application. — *On a trouvé pour la base d'un rectangle* $33^m,28$ *et pour la hauteur* $9^m,43$; *chacun de ces deux nombres est obtenu à* $0^m,01$ *près; avec quel degré d'exactitude pourra-t-on calculer la surface?*

L'erreur absolue est plus petite que $(10 + 34)$ centièmes ou que 0,44. On pourra donc calculer la surface à 1 mètre carré près.

Le produit est égal à 313,8304.

Donc la surface sera $313^{mq},8$ augmentés d'une fraction plus petite que 4 centièmes et augmentés ou diminués d'une fraction plus petite que 44 centièmes. L'erreur totale sera donc plus petite que 48 centièmes. Si je prends 314 mètres carrés, l'erreur sera plus petite que $20 + 48$ centièmes et, *à fortiori*, qu'une unité.

25. Remarque. — Même théorème général pour les puissances.

26. Application. — *Le rayon d'une circonférence de cercle est* $0^m,84$ *à 1 centimètre près par défaut; calculer la circonférence avec toute l'exactitude que comporte cette donnée.*

La circonférence est exprimée par $2\pi.R$ ou par

$$6,283185\ldots \times 0,84.$$

L'erreur sera plus petite que $0,01 \times 7 + 0,0\ldots1 \times 0,9$. Si je prends 2π jusqu'aux centièmes, l'erreur du produit sera plus petite que $0,01 \times 7 + 0,01 \times 1$ ou que $8 \times 0,01$; je calcule donc le produit $6,28 \times 0,84$, qui est égal à 5,2572.

$5^m,3$ sera la longueur de la circonférence augmentée de $0^m,0428$ et diminuée d'une quantité inférieure à 8 centimètres.

$5^m,3$ représentera donc la longueur de la circonférence avec une erreur plus petite que 8 centimètres, c'est-à-dire plus petite que 1 décimètre.

4° DIVISION.

27. **Théorème.** — *Lorsque, dans une division, le dividende seul est inexact, l'erreur absolue du quotient est égale à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur.*

Ce théorème est évident ; car soit $A = a + \alpha$, il vient $\frac{A}{B} = \frac{a}{B} + \frac{\alpha}{B}$.

28. **Théorème.** — *Si le diviseur seul est inexact, l'erreur absolue du quotient est moindre que l'erreur du diviseur multipliée par le dividende et divisée par le carré du diviseur pris par défaut.*

1° Soit le diviseur approché par défaut $B = b + \beta$, l'erreur sera

$$\frac{A}{b} - \frac{A}{b+\beta} = \frac{A\beta}{b(b+\beta)};$$

elle est

$$< \frac{A\beta}{b^2}$$

en remplaçant $b + \beta$ par b.

2° Soit le diviseur approché par excès $B = b - \beta$, l'erreur sera

$$\frac{A}{b-\beta} - \frac{A}{b} = \frac{A\beta}{(b-\beta)b} < \frac{A\beta}{(b-\beta)^2} < \frac{A\beta}{B^2}.$$

29. **Théorème.** — *Si le dividende et le diviseur sont tous deux approchés, l'erreur absolue du quotient est plus petite que la somme des produits obtenus en multipliant chacun de ces nombres par l'erreur de l'autre divisée par le carré du diviseur pris par défaut.*

Cette règle peut s'appliquer dans tous les cas; nous la démontrerons, pour fixer les idées, dans le cas où le dividende est par excès et le diviseur par défaut.

L'un des facteurs est $A = a - \alpha$, l'autre est $B = b + \beta$; l'erreur est

$$\frac{a}{b} - \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{a\beta + b\alpha}{b(b+\beta)},$$

le numérateur égale

$$(A+\alpha)B + b\alpha = A\beta + \alpha(b+\beta) = A\beta + B\alpha,$$

le dénominateur est

$$< b^2;$$

donc l'erreur est

$$< \frac{A\beta + B\alpha}{b^2}.$$

30. Remarque. — Dans la pratique, on remplacera les nombres A, B inconnus par des valeurs approchées par excès et α, β par leurs limites supérieures. Le théorème aura lieu *à fortiori*.

31. Problème. — *Deux nombres étant donnés avec une approximation illimitée, trouver leur quotient à une unité près d'un ordre décimal donné.*

Cette question se résout par la méthode de la division abrégée.

DIVISION ABRÉGÉE.

32. *Règle.* — On détermine d'abord le nombre des chiffres du quotient. Cela fait, on prend sur la gauche du diviseur un nombre composé d'autant de chiffres qu'il en faudra pour former un nombre égal ou supérieur au nombre des chiffres du quotient. On prend à la droite de ce nombre autant de chiffres qu'il y en aura au quotient; l'ensemble des chiffres ainsi déterminé est le premier diviseur. On sépare sur le dividende autant de chiffres qu'il en faut pour contenir au moins une fois le diviseur; on forme ainsi le premier dividende. On efface tous les autres chiffres du dividende, ainsi que ceux qui sont à la droite du premier diviseur.

On divise le premier dividende par le premier diviseur; puis,

pour effectuer la seconde division, au lieu d'abaisser le chiffre suivant du dividende ou un zéro, on efface le dernier chiffre du diviseur et on divise le premier reste par le nouveau diviseur ainsi formé. Puis on divisera le second reste par le troisième diviseur, obtenu en effaçant le dernier chiffre à droite, et ainsi de suite.

Les chiffres obtenus dans ces divisions partielles sont les différents chiffres du quotient, qui sera exact à une unité près de l'ordre du dernier chiffre.

Pour démontrer cette règle, nous allons nous proposer de calculer le quotient de 1425000,81 par 4175,837, à une unité près. Le quotient aura trois chiffres. Je prendrai donc à la gauche du diviseur le chiffre 4, puis les trois autres chiffres 1, 7, 5, suivant la règle; je séparerai à la gauche du dividende cinq chiffres, et je fais la première division :

$$\begin{array}{r|l} 14250 & 4175 \\ 1725 & \overline{341} \\ 57 & \\ 16 & \end{array}$$

Le quotient est 3. Je divise le reste 1725 par 417 : le quotient est 4; je divise le reste 57 par 41 : le quotient est 1. Je dis que 341 exprime le quotient cherché à une unité près.

En effet, je remarque que, si je fais la multiplication abrégée suivante :

$$\begin{array}{r} 4175,837 \\ 143 \\ \hline 12525 \\ 1668 \\ 41 \\ \hline 14234 \end{array}$$

de 4175,837 par 341, et que je retranche chaque produit partiel successivement du dividende, j'obtiendrai précisément les restes successifs 1725, 57 et 16 que j'ai trouvés dans la division abrégée. Je déduis de là 14250 = le produit approché + 16; or, ce

produit approché $= 4175{,}8 \times 341^{\text{cent.}} - e$, $e < 3 + 4 + 1$ unités.

$$\frac{14250}{4175{,}837} = 341^{\text{cent.}} + \frac{16}{4175{,}837} - \frac{e}{4175}.$$

Multipliant par 100,

$$\frac{1425000}{4175{,}837} = 341 + \frac{1600}{4175{,}837} - \frac{100e}{4175{,}837}$$

et

$$\frac{1425000{,}81}{4175{,}837} = 341 + \frac{1600.81}{4175{,}837} - \frac{100e}{4175{,}837}.$$

Il s'agit de prouver que chacune des fractions du second membre est plus petite que 1. Comme elles ont un signe contraire, le quotient sera 341 à une unité près. Or 16 est, comme il était facile de le prévoir, inférieur à 41, car c'est un reste de la division par 41; donc 1600,81 sera inférieur au dénominateur 4175,837, et cette première fraction est au-dessous de l'unité. Quant à la seconde, e est plus petit que 3×9, par conséquent plus petit que 41. Je remarquerai que j'ai pris 4 précisément pour avoir un nombre supérieur à 3, nombre des chiffres du quotient. Donc $100e$ est inférieur à 4175,837, et cette seconde fraction est encore inférieure à l'unité.

33. Remarque. — Il est toujours facile de ramener tous les cas à celui où l'on veut le quotient à une unité près, en avançant ou reculant la virgule au dividende.

34. Application. — *Calculer à 1 kilomètre près le rayon de la Terre, en supposant qu'elle soit sphérique et que sa circonférence soit 40 millions de mètres.*

Je calcule le quotient de 40 000 par 2π à une unité près par la méthode de division abrégée.

$$\begin{array}{r|l} 400000 & 6283 \\ \cline{2-2} 23014 & 6366 \\ 4265 & \\ 397 & \\ 25 & \end{array}$$

[illegible] à 1 kilomètre près.

36. Théorème. — [illegible] approximation [illegible] leur somme ?

Les théorèmes que nous avons donnés permettent d'arriver à ce résultat.

37. Application. — On a trouvé pour le nombre 0,457 *approché à* 0,001, *quelle erreur sera commise en prenant* [illegible] ?

Appliquant le théorème du n° 14, l'erreur sera plus petite que $\frac{0,001 \times 3}{0,457}$ ou que $\frac{0,001 \times 3}{0,1}$, ou enfin que 0,01. L'erreur sera plus petite qu'un dixième, et l'on pourra avoir le nombre à un dixième près.

37. Application. — *Connaissant deux nombres* 3,612 *et* 8,23456, *l'un à* 0,001, *l'autre à* 0,00001, *sur quelle approximation peut-on compter dans leur quotient?*

D'après le théorème III de ce paragraphe, l'erreur sera plus petite que $\frac{9 \times 0,001}{8^2} + \frac{4 \times 0,00001}{8^2}$ ou que $\frac{0,01}{64}$, ou enfin que 0,001.

On pourra compter sur les millièmes.

5° PUISSANCES.

38. **Théorème.** — *L'erreur absolue du carré d'un nombre approché est inférieure au double produit du nombre approché par excès par son erreur absolue.*

En effet, le carré est le produit de deux facteurs égaux.

39. **Théorème.** — *L'erreur absolue d'un cube est plus petite que le triple produit du nombre approché par excès par l'erreur absolue.*

40. Remarque. — On démontrerait de même le théorème pour la puissance $n^{\text{ième}}$; l'erreur absolue d'une puissance est plus petite que n fois le produit du nombre approché par excès par l'erreur absolue.

41. Problème. — *Étant donné un nombre avec une approximation illimitée, calculer son carré ou son cube avec une approximation donnée.*

On appliquera la règle de la multiplication abrégée.

42. Problème. — *Étant donné un nombre avec une approximation déterminée, trouver l'approximation avec laquelle on peut calculer son carré ou son cube.*

Les théorèmes précédents permettent de résoudre cette question.

6° RACINES.

43. **Théorème.** — *L'erreur commise sur la racine carrée d'un nombre approché est plus petite que l'erreur commise sur ce nombre divisée par le double de la racine carrée de ce nombre pris par défaut.*

Soit le nombre pris par excès $A = a - \alpha$, l'erreur est

$$\sqrt{a} - \sqrt{A} = \sqrt{a} - \sqrt{a - \alpha},$$

ou, en multipliant et divisant par la somme des radicaux,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a - \alpha}};$$

elle est donc plus petite que

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{a - \alpha}}.$$

Il en serait de même si le nombre était approché par défaut.

44. **Théorème.** — *L'erreur commise sur la racine cubique d'un nombre approché est plus petite que l'erreur du nombre divisée par le triple carré de la racine cubique du nombre pris par défaut.*

Supposons le nombre approché par défaut, alors $A = a + \alpha$, l'erreur est $\sqrt[3]{a+\alpha} - \sqrt[3]{a}$; or $x - y = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$, d'après un théorème que l'on démontre immédiatement en chassant le dénominateur.

Remplaçant x par $\sqrt[3]{a+\alpha}$ et y par $\sqrt[3]{a}$, on a

$$\sqrt{a+\alpha} - \sqrt{a} = \frac{\alpha}{(\sqrt{a+\alpha})^2 + \sqrt{a+\alpha}\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2};$$

or cette expression est plus petite que $\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a})^2}$.

45. Problème. — *Étant donné un nombre susceptible d'une approximation indéfinie, calculer sa racine carrée ou cubique à une unité près d'un ordre donné.*

Ce problème est résolu dans les Cours d'Arithmétique, au chapitre des *Racines*.

46. Problème. — *Un nombre étant donné avec une approximation déterminée, calculer avec quelle approximation on pourra obtenir sa racine carrée ou cubique.*

Soit 4,5623 *connu à* 0,0001 *près, avec quelle approximation aura-t-on sa racine?*

D'après le n° 43, l'erreur commise sur la racine sera plus petite que $\frac{0,0001}{2\sqrt{4}}$ ou plus petite que $\frac{0,0001}{4}$. On pourra donc avoir la racine avec quatre chiffres exacts.

CHAP. II. — ERREURS RELATIVES.

47. Principe. — *Si l'on connaît dans un nombre m chiffres exacts, l'erreur relative sera plus petite que* $\frac{1}{10^{m-1}}$, *ou, si* K *désigne le premier chiffre du nombre proposé,* $\frac{1}{K.10^{m-1}}$.

En effet, soit le nombre 328,42 exact à 0,01 près, l'erreur relative sera plus petite que $\frac{1}{32428}$, ou plus petite que $\frac{1}{30000}$, ou plus petite que $\frac{1}{3.10^4}$, et, *à fortiori*, plus petite que $\frac{1}{10^4}$.

48. Principe. — *Si l'on sait que l'erreur relative d'un nombre est plus petite que* $\frac{1}{10^m}$, *on pourra compter sur m chiffres exacts, et si l'erreur est plus petite que* $\frac{1}{(K+1)10^m}$, K *désignant le premier chiffre du nombre, on pourra compter sur* $m+1$ *chiffres exacts.*

En effet, soit le nombre 45,327; on sait que l'erreur relative ε est plus petite que $\frac{1}{10^5}$: l'erreur absolue sera alors plus petite que $\frac{45,327}{10000}$, c'est-à-dire plus petite que 1; donc on pourra compter sur cinq chiffres.

Si l'on savait que ε est plus petit que $\frac{1}{5\times10^4}$, on voit que l'erreur absolue e est plus petite que $\frac{45,327}{5000}$, ou plus petite que 1; on pourrait compter sur cinq chiffres.

[illegible] — [illegible] une erreur [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] nombres [illegible] exacts [illegible]

[illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] nombre demandé [illegible] $= x$ [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] plus petit que $\frac{1}{2}$ [illegible] nombre demandé égale [illegible] $- 0.47 = x$, [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] nombre sera représenté par 49 [illegible] près. On pourra bien compter sur deux chiffres, ou tout au moins sur une approximation de l'ordre des unités du second ordre; mais on a été obligé de changer le second chiffre. Dans ce cas, il y a deux causes d'erreur : l'une, l'erreur originelle, dont le nombre proposé est affecté; l'autre provient de la suppression de chiffres sur lesquels on serait incertain.

1° ADDITION ET SOUSTRACTION.

50. L'erreur relative d'une somme ou d'une différence se calculera en passant par l'erreur absolue et en divisant par le nombre exact. Elle n'a pas d'importance ni d'usage.

2° MULTIPLICATION.

51. **Théorème.** — *L'erreur relative d'un produit de deux facteurs dont l'un seulement est approché est égale à l'erreur relative du facteur inexact.*

Soient A et B les deux nombres et α l'erreur commise sur A; l'erreur absolue est (n° 13) $B\alpha$ et l'erreur relative est $\frac{B\alpha}{AB}$ ou $\frac{\alpha}{A}$.

52. **Théorème.** — *Dans tous les cas, l'erreur relative d'un produit de deux facteurs est plus petite que la somme des erreurs relatives des facteurs (en remplaçant les erreurs relatives par leurs limites).*

1° Les deux facteurs sont approchés par défaut. Dans ce cas, l'erreur relative du produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs diminuée du produit de ces erreurs.

En effet, soit $A = a + \alpha$ et $B = b + \beta$; l'erreur absolue est $AB - ab$, ou $a\beta + b\alpha + \alpha\beta$, ou $(a + \alpha)\beta + (b + \beta)\alpha - a\beta$; donc l'erreur relative est $\frac{\beta}{B} + \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB}$. C. Q. F. D.

2° Si les facteurs sont approchés par excès tous les deux, l'erreur relative du produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs augmentée du produit de ces erreurs.

Cette proposition se démontrerait comme la précédente; mais, si l'on remplace les erreurs relatives par leurs limites, on peut démontrer que l'erreur relative du produit est plus petite que la somme des erreurs relatives des facteurs.

53. Un exemple fera comprendre l'exactitude de ce qui précède :

Soit $\pi = 3,142$ à 0,001 près par excès, $\sqrt{2} = 1,415$ à 0,001 près par excès; l'erreur relative du produit est précisément égale à

$$\frac{0,00040734\ldots}{\pi} + \frac{0,0007\ldots}{\sqrt{2}} + \frac{0,000407\ldots \times 0,0007}{\sqrt{2}}.$$

Si je remplace le numérateur de la première fraction par 0,001, j'augmente la fraction de plus de $\frac{1}{10^4}$. De même pour le numérateur de la seconde fraction, si je remplace 0,0007 par 0,001, j'augmente la fraction de plus de $\frac{1}{10^4}$, tandis qu'en négligeant la troisième fraction, l'erreur est plus petite que $\frac{1}{10^6}$.

3° Si les facteurs sont approchés l'un par défaut et l'autre par

excès, l'erreur relative du produit sera égale à la différence des erreurs relatives des facteurs, augmentée ou diminuée du produit de ces erreurs.

54. **Théorème.** — *L'erreur relative d'un produit de plus de deux facteurs est plus petite que la somme des erreurs relatives de ces facteurs (en remplaçant les erreurs relatives des facteurs par leurs limites et les nombres exacts par des limites supérieures, s'il y a lieu).*

Je prendrai les facteurs A, B, C, D. Le produit ABCD = (AB) (CD); l'erreur relative du produit (AB) (CD) est plus petite que la somme des erreurs relatives de (AB) et de (CD); mais l'erreur relative de (AB) est plus petite que $\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}$; celle de (CD) est plus petite que $\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}$: donc celle de ABCD est plus petite que $\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}$.

55. Problème. — *Des nombres sont donnés avec une approximation indéfinie; combien doit-on prendre de chiffres dans chaque facteur pour pouvoir compter sur m chiffres au produit?*

1° Supposons qu'il y ait deux facteurs. Puisqu'il faut m chiffres, il suffira que l'erreur relative ε du produit soit plus petite que $\frac{1}{10^m}$ ou plus petite que $\frac{1}{(K+1)10^{m-1}}$, K étant le premier chiffre du produit.

Il suffira donc que chaque facteur soit évalué avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(K+1)10^{m-1}}$, ou au moins de $\frac{1}{2.10^m}$. Si aucun des facteurs ne commence par 1, il suffira (Principe I) de prendre $m+1$ chiffres, sinon on en prendra $m+2$.

2° S'il y a plus de deux facteurs, quatre par exemple, il suffira que l'erreur relative de chacun d'eux soit plus petite que $\frac{1}{4.10^m}$, ce qu'il sera facile de réaliser.

56. Problème. — *Deux nombres sont donnés, chacun avec m*

chiffres exacts; quel sera le nombre de chiffres sur lequel on pourra compter au produit?

L'erreur relative de chaque facteur est plus petite que $\frac{1}{10^{m-1}}$: leur somme sera plus petite que $\frac{2}{10^{m-1}}$, *à fortiori* plus petite que $\frac{1}{10^{m-2}}$. Il y aura donc $m-1$ chiffres sur lesquels on pourra compter au produit.

Il est facile de voir que, à moins d'un cas exceptionnel, le produit aura $m-1$ chiffres sur lesquels on pourra compter. En effet, soit K et K′ les deux premiers chiffres des facteurs, l'erreur relative du produit sera plus petite que $\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K'}\right)\frac{1}{10^{m-1}}$.

Si K et K′ sont plus grands tous les deux que 1, cette erreur sera plus petite que $\frac{1}{10^{m-1}}$, et l'on pourra compter sur $m-1$ chiffres.

Si $K=1$ et $K'=1$, l'erreur relative du produit a pour limite supérieure $\frac{1}{10^{m-1}}+\frac{1}{10^{m-1}}=\frac{1}{5.10^{m-2}}$.

Or le premier chiffre du produit est plus petit que 5, car les premiers chiffres des facteurs sont égaux à 1. Donc on pourra calculer $m-1$ chiffres au produit.

3° DIVISION.

57. **Théorème.** — *L'erreur relative du quotient est moindre que la somme des erreurs relatives des deux termes (en remplaçant les erreurs relatives des deux termes par leurs limites).*

1° Si le dividende seul est inexact, l'erreur relative du quotient est égale à l'erreur relative du dividende, car on considé-

rera $\frac{A+\alpha}{B}$ comme le produit de $A+\alpha$ par $\frac{1}{B}$, et l'on appliquera le théorème de la multiplication.

2° Si le dividende et le diviseur sont approchés, l'erreur relative du quotient est plus petite que la somme des erreurs relatives des deux termes (en prenant pour ces erreurs relatives leurs limites).

Car, en considérant le dividende comme le produit du diviseur par le quotient, l'erreur relative du dividende est sensiblement égale à la somme algébrique de l'erreur relative du diviseur et de celle du quotient. Par conséquent, l'erreur relative du quotient est égale sensiblement à la somme algébrique des erreurs relatives des deux termes, et, en prenant les erreurs comme nous l'avons dit, nous arrivons à l'énoncé donné.

58. Problèmes. — Comme l'énoncé est le même que pour la multiplication, les problèmes ne diffèrent pas essentiellement.

4° PUISSANCES ET RACINES.

59. **Théorème.** — *L'erreur relative du carré d'un nombre approché est plus petite que deux fois l'erreur relative du nombre (en remplaçant l'erreur par sa limite).*

Cela résulte du théorème correspondant dans la multiplication de deux facteurs.

60. **Théorème.** — *L'erreur relative du cube d'un nombre approché est plus petite que le triple de l'erreur relative du nombre (en remplaçant l'erreur par sa limite).*

Cela résulte du théorème correspondant dans la multiplication de trois facteurs.

61. **Théorème.** — *L'erreur relative d'une racine carrée est plus petite que la moitié de l'erreur relative du nombre (en remplaçant l'erreur du nombre par sa limite).*

En effet, le nombre étant le carré de sa racine, deux fois l'erreur relative de la racine égale sensiblement l'erreur relative du nombre, et l'erreur relative de la racine égale sensiblement la moitié de l'erreur relative du nombre, et, en remplaçant cette dernière par une limite, il y aura inégalité.

62. **Théorème.** — *L'erreur relative d'une racine cubique est plus petite que le tiers de l'erreur relative du nombre (en remplaçant l'erreur relative du nombre par sa limite).*

Même démonstration que pour le précédent.

MAXIMA ET MINIMA.

THÉORIE ET QUESTIONS.

Définition des fonctions, exemples; variables indépendantes. — Fonctions algébriques et fonctions transcendantes. — Valeurs des fonctions pour certaines valeurs des variables, et inversement. — Moyen pratique de résoudre la seconde question pour les fonctions quelconques à une seule inconnue.

Maximum ou minimum d'une fonction. — Moyen pratique pour les déterminer quand les fonctions sont à une seule variable. — Méthode algébrique précise quand les fonctions ne donnent lieu qu'à des équations du second degré ou à des équations bicarrées. — Fonctions entières du second degré. — Fonctions fractionnaires. — Fonctions irrationnelles.

Théorèmes sur les maxima et minima. — Renvoi au recueil pour les exercices.

Avant d'expliquer la manière de traiter les problèmes sur les maxima et les minima, il est nécessaire de dire quelques mots sur ce que l'on entend par fonction et par variable, et sur les cas où les questions de maximum et de minimum sont susceptibles d'être traitées par les Mathématiques élémentaires.

On appelle *fonction* une quantité dépendant d'une ou plusieurs autres quantités susceptibles de recevoir des valeurs variables arbitraires. Ces dernières reçoivent le nom de *variables indépendantes*.

Ainsi la surface d'un rectangle est une fonction dépendant de sa base et de sa hauteur; l'aire d'un cercle est une fonction de son rayon. Cette dénomination de *fonctions* et de *variables* dépend absolument de chaque cas où l'on se trouve placé, de la manière dont on envisage les questions, de telle sorte que, selon les cas, la fonction peut devenir la variable, et la variable, au

contraire, la fonction. Supposons, en effet, la surface d'un triangle donnée : sa base et sa hauteur sont indéterminées; si l'on donne à la base diverses valeurs, il en résulte autant de valeurs correspondantes pour la hauteur : celle-ci est alors la fonction; la base est la variable. Si, au contraire, on donnait à la hauteur des valeurs arbitraires et si l'on cherchait à en conclure les valeurs correspondantes de la base, ce serait cette dernière qu'on devrait appeler *fonction;* la variable indépendante serait la hauteur.

Les fonctions sont algébriques ou transcendantes; elles sont algébriques lorsque la fonction et la variable ou les variables sont liées entre elles par des relations où n'entrent que les signes ordinaires de l'Algèbre. Elles sont transcendantes quand les variables indépendantes entrent dans les formules sous forme de signes trigonométriques, de logarithmes, d'exposants, etc.

Les fonctions algébriques, les seules dont nous ayons à nous occuper, se distinguent elles-mêmes en fonctions algébriques entières et fonctions algébriques fractionnaires, selon que les quantités variables n'entrent pas en dénominateur ou bien se présentent en diviseur.

Les fonctions algébriques entières sont classées suivant leur degré : ainsi l'on a la fonction du premier, du deuxième degré, etc.

Deux questions se présentent sur la fonction; l'une est très-simple : c'est de savoir quelle valeur prend la fonction pour une valeur donnée de la variable. Il suffit d'un calcul toujours facile pour la résoudre.

Il n'en est pas toujours de même pour la seconde. Quelle valeur faut-il donner à la variable pour que la fonction prenne une valeur déterminée? Lorsque la fonction est algébrique et entière et qu'elle n'est pas d'un degré supérieur au second, on peut toujours y arriver au moyen d'une équation du premier ou du second degré.

Lorsque la fonction est de degré supérieur ou transcendante à une seule variable, on peut arriver à une solution approximative au moyen d'une construction graphique. On trace deux lignes perpendiculaires, et, convenant d'une certaine longueur pour représenter l'unité, on porte sur l'une des lignes, la ligne hori-

zontale par exemple, les valeurs données à la variable; on calcule les valeurs que prend la fonction pour ces valeurs de la variable, et aux points correspondants on élève des perpendiculaires auxquelles on donne pour longueurs les valeurs de la fonction propre à chacune des valeurs de l'inconnue. On obtient ainsi une série de points qu'on réunit par une courbe régulière; cela fait, pour avoir la valeur de la variable correspondante à une valeur donnée de la fonction, sur la ligne verticale, on porte la valeur de la fonction, on trace une horizontale jusqu'à la rencontre de la courbe; en ce point on mène une verticale, et l'on a la valeur de la variable représentée par la longueur comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point de croisement des deux lignes primitivement tracées. On n'a ainsi que des valeurs approchées, mais qui suffisent dans bien des cas. Il est clair qu'on peut adopter deux longueurs différentes pour représenter l'unité, suivant l'horizontale et suivant la verticale. Nous n'insisterons pas plus longtemps sur cette méthode, qui sort des limites des Mathématiques élémentaires, mais dont cependant il est bon d'avoir au moins une idée.

On appelle *maximum* ou *minimum* d'une fonction toute valeur de cette fonction plus grande ou plus petite que les valeurs correspondant à des valeurs de la variable voisine de la première, soit plus grandes, soit plus petites.

La méthode des courbes peut servir à déterminer les maximum ou minimum d'une fonction à une seule variable; il suffit, en effet, de prendre dans ce cas les valeurs de la fonction pour lesquelles la courbe a des tangentes horizontales.

Lorsque les fonctions donnent lieu à des équations du premier ou du second degré, ou à des équations bicarrées, l'Algèbre élémentaire permet de traiter les questions de maximum et de minimum d'une manière exacte.

C'est de ces cas qu'il va être maintenant question.

Remarquons qu'il est inutile de considérer les fonctions du premier degré, puisque ces fonctions prennent toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$ (ce que montrerait la construction d'une courbe, qui se réduit alors à une droite, et n'a, par suite, pas de tangente horizontale).

Passons donc aux fonctions du second degré, et prenons d'abord les fonctions entières.

Soit $ax^2 + bx + c$ une fonction entière du second degré en x, que nous prenons comme variable. Désignons par m une valeur quelconque de la fonction donnée; égalons la fonction à cette valeur, qui doit évidemment être réelle, et cherchons quelle est la plus grande ou la plus petite valeur de m, correspondant à des valeurs réelles de x.

Résolvons l'équation

$$ax^2 + bx + c = m;$$

elle donne

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a}.$$

Pour que x ne soit pas imaginaire, il faut que la quantité soumise au radical soit positive. Posons donc la condition

$$b^2 - 4ac + 4am > 0,$$
$$4am > 4ac - b^2.$$

Deux cas peuvent se présenter : a peut être positif ou négatif. Si a est positif, je puis diviser par $4a$, et j'ai

$$m > \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Puisqu'il faut que m soit plus grand que $\frac{4ac - b^2}{4a}$, en prenant précisément cette valeur pour m, j'aurai la plus petite valeur, c'est-à-dire le minimum de la fonction.

Si a est négatif, en divisant par $4a$, je dois changer le signe, et, pour que x soit réel, il faudra qu'on ait

$$m < \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

La plus grande valeur de m, c'est-à-dire le maximum de la fonction, sera donc

$$\frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Donc, lorsque a est positif, il y a minimum, et lorsque a est

négatif, il y a maximum; la valeur limite s'obtient en tout cas en calculant

$$\frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Quant à la valeur correspondante de la variable, le radical s'annulant, il reste

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Ce recueil présente une série d'applications de cette règle, qui permet d'obtenir immédiatement des résultats.

Prenons maintenant une fonction fractionnaire, soit, par exemple,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Égalons de même la fonction à m et résolvons l'équation

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m.$$

Elle donne pour x

$$x = \frac{-(b - b'm) \pm \sqrt{(b - b'm)^2 - 4(a - a'm)(c - c'm)}}{2(a - a'm)}.$$

La quantité soumise au radical doit rester positive ; cette quantité est un trinôme de second degré en m ; appelons α, β et γ les coefficients de ce trinôme, la condition sera exprimée par

$$(1) \qquad \alpha m^2 + \beta m + \gamma > 0.$$

Décomposons le premier membre en facteurs du premier degré, et appelons m' la plus grande et m'' la plus petite des racines de l'équation

$$\alpha m^2 + \beta m + \gamma = 0.$$

L'expression (1) devient

$$(2) \qquad \alpha(m - m')(m - m'') > 0.$$

Comme précédemment, α peut être positif ou négatif. Examinons ce qui arrive si α est positif : pour que (2) reste positif,

il faut que les deux facteurs restent de même signe, c'est-à-dire qu'on peut donner à m toutes les valeurs plus grandes que la plus grande racine, ou plus petites que la plus petite racine, mais aucune des valeurs intermédiaires. La plus grande racine m' est donc un minimum, la plus petite m'' un maximum.

Si α est négatif, pour que le produit soit positif, il faut que les deux autres facteurs soient de signes contraires, et le raisonnement que nous venons d'employer montre qu'alors m' est un maximum et m'' un minimum.

Nous renverrons aux exemples traités dans ce recueil.

La résolution des équations bicarrées se ramenant à celle des équations du second degré, nous n'avons pas à traiter spécialement ce cas. Pour ce qui est des fonctions irrationnelles, on les égale toujours à une valeur indéterminée m, puis on élève à une puissance suffisante pour faire disparaître les radicaux.

Nous terminerons cette Note en démontrant trois théorèmes qui rendent très-simple la solution d'une foule de problèmes sur la question qui nous occupe.

Théorème I. — Quand la somme de deux quantités positives et variables est constante, leur produit est maximum lorsque ces quantités sont égales.

Soient x et y deux quantités variables dont la somme a est constante; appelons m la valeur du produit, nous aurons les équations

$$(1) \qquad xy = m,$$

$$(2) \qquad x + y = a.$$

Éliminons y, nous obtenons

$$x^2 - ax + m = 0,$$

qui admet pour maximum de x

$$x = \frac{a}{2}$$

et, par suite,

$$y = \frac{a}{2} = x.$$

Théorème II. — Quand la somme de plusieurs quantités positives et variables est constante, leur produit est maximum quand toutes ces quantités sont égales.

Soient trois quantités variables x, y, z ayant une somme constante a, je dis que le produit ne peut être maximum qu'autant qu'on a $x = y = z$.

Supposons, en effet, qu'il y ait deux quantités inégales x et y; je vais montrer qu'on n'a pas le maximum du produit.

Je suppose les autres quantités z non changées de valeur; alors la somme $x + y$ est constante, elle vaut $a - z$; le maximum du produit xy correspond alors, d'après le théorème précédent, aux valeurs de x et de y, égales entre elles, et égales par suite à $\frac{1}{2}(x + y)$.

Donc, tant qu'il y a deux quantités inégales, on peut augmenter la valeur du produit; donc celui-ci n'est maximum qu'autant que toutes les quantités sont égales.

Théorème III. — Quand la somme de deux quantités positives et variables est constante, le produit de ces quantités élevées à des puissances quelconques est maximum quand ces quantités sont dans le même rapport que leurs exposants.

Soient x et y les deux quantités, a leur somme. Considérons le produit $x^m y^n$, je dis que ce produit sera maximum lorsqu'on aura

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$$

Pour le prouver, je remarque que, si la quantité $x^m y^n$ est rendue maximum, il en sera de même de la quantité

$$\frac{x^m y^n}{m^m n^n},$$

puisque $m^m n^n$ est un nombre constant; or

$$\frac{x^m y^n}{m^m n^n} = \left(\frac{x}{m}\right)^m \times \left(\frac{y}{n}\right)^n = \frac{x}{m} \times \frac{x}{m} \times \frac{x}{m} \times \cdots \times \frac{y}{n} \times \frac{y}{n} \cdots$$

J'ai ainsi deux séries de facteurs dont la somme est constante : la première, en effet, contient m facteurs $\frac{x}{m}$, dont la somme

est x; la deuxième contient n facteurs $\frac{y}{n}$ ayant pour somme y. La somme de tous les facteurs vaut donc $x+y=a=\text{const.}$ Pour que le produit soit maximum, il faut que tous les facteurs soient égaux, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{y}=\frac{m}{n}.$$

On voit, sans qu'il soit besoin de le dire, comment on pourrait étendre ce dernier théorème aux cas de plusieurs quantités. Il faut alors que les diverses variables aient des valeurs proportionnelles à leurs exposants.

Nous avons donné, dans ce recueil, un grand nombre d'exercices sur ces théorèmes, qui résolvent toutes les questions relatives aux surfaces et aux volumes de la Géométrie élémentaire.

PROBLÈMES.

1° ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

1. Comment détermine-t-on les valeurs maxima et minima d'une expression de la forme

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}?$$

Application à l'expression $\frac{x^2+1}{x}$. (Sorbonne, 1858.)

2. Expliquer la méthode à suivre dans les questions de maxima et de minima qui peuvent se résoudre par les équations du second degré ; en faire l'application au problème suivant :

Partager 27 en deux parties telles, que quatre fois le carré de la première, plus cinq fois le carré de la deuxième, soit le plus petite possible. (Sorbonne, 1859.)

3. Trouver la plus grande et la plus petite valeur de l'expression

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}.$$

(Sorbonne, 1861.)

4. Partager le nombre 1225 en deux parties telles, que la somme de trois fois la racine carrée de la première partie et de quatre fois la racine carrée de la seconde soit un maximum. (Sorbonne, 1861.)

5. Déterminer la valeur de x pour laquelle la fraction

$$\frac{3x^2-12x+1}{x^2+2}$$

devient maximum. (Sorbonne, 1862.)

6. La somme des côtés de deux cubes vaut 5 mètres et la somme de leurs volumes vaut $56^{mc},6$; on demande de calculer les longueurs des deux côtés. (Sorbonne, 1862.)

La somme des côtés restant constante, quel est le minimum au-dessous duquel la somme des volumes ne saurait descendre?

7. Trouver la valeur maximum et minimum de

$$\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}.$$

(Sorbonne, 1863.)

8. Trouver les valeurs maxima et minima de la fraction algébrique

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}.$$

(Sorbonne, 1864.)

9. Trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$x+\frac{1}{x}.$$

(Sorbonne, 1865.)

10. Trouver la plus grande et la plus petite des valeurs que peut acquérir, pour les valeurs réelles de x, l'expression

$$\frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}.$$

(Sorbonne, 1867.)

11. Étant donnés les trois nombres positifs a, b, c, trouver deux nombres positifs x et y, tels que l'on ait $ax+by=c$ et que la somme x^2+y^2 soit le plus petite possible. (Sorbonne, 1868.)

12. Le produit de deux nombres variables est constant et égal à a^2; trouver le maximum de la somme de ces deux nombres. (Sorbonne, 1870.)

13. Valeur maximum et minimum de l'expression

$$\frac{x^2}{x-1}.$$

(Sorbonne, 1870.)

14. Trouver la plus grande et la plus petite valeur de la fraction

$$\frac{3x}{x^2+x+1}.$$

(Sorbonne, 1870.)

15. On donne le produit P de deux nombres positifs; trouver le minimum de leur somme. (Sorbonne, 1871.)

16. Trouver la plus grande et la plus petite valeur que puisse acquérir l'expression

$$\frac{2x-3}{x^2+4}$$

pour des valeurs réelles de x. (Sorbonne, 1873.)

17. Calculer à 0,01 près les valeurs de x qui font prendre à l'expression

$$\frac{2x-1}{x^2+1}$$

sa plus petite et sa plus grande valeur. (Sorbonne, 1874.)

18. Déterminer la valeur de x qui rend minimum la somme

$$(ax+b)^2+(a'x+b')^2.$$

Indiquer ce minimum. (Sorbonne, 1876.)

19. Les nombres a et b étant supposés connus, trouver le maximum et le minimum de l'expression $\frac{2ax+b}{x^2+1}$; dire en particulier quelle valeur on doit attribuer aux nombres a et b pour que le maximum et le minimum de l'expression $\frac{2ax+b}{x^2+1}$ soient égaux, le premier à $+4$, le second à -1. (Sorbonne, 1876.)

20. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre l'expression

$$2x^2-5x+7,$$

quand on attribue à x des valeurs réelles? (Sorbonne, 1876.)

2° GÉOMÉTRIE.

21. Inscrire dans un cercle le rectangle maximum. (Sorbonne, 1872.)

22. Trouver le plus grand parallélépipède rectangle déduit du cylindre. (Sorbonne, 1872.)

23. Trouver parmi les triangles ayant même périmètre celui dont la surface est maximum. (Sorbonne, 1873.)

24. Parmi les triangles rectangles ayant même hypoténuse, quel est celui dont la surface est maximum? (Sorbonne, 1873.)

25. De tous les parallélépipèdes rectangles ayant même périmètre, quel est celui dont le volume est maximum? (Sorbonne, 1873.)

26. Quel est le plus grand parallélépipède rectangle inscrit dans la sphère? (Sorbonne, 1874.)

27. Inscrire dans un triangle le rectangle maximum. (Sorbonne, 1874.)

28. On a deux points A et B distants de 225 kilomètres. Les 100 kilogrammes de charbon coûtent, en A, 3 fr. 75, en B, 4 fr. 75. Le transport du charbon revient à 0 fr. 08 les 100 kilogrammes pour 1 kilomètre. Cela posé, on demande quel est le point compris sur AB où le charbon coûte le même prix, qu'il vienne de A ou de B, et l'on demande de plus de montrer que ce point est celui où le charbon coûte le plus cher. (Sorbonne, 1875.)

29. De tous les parallélépipèdes rectangles ayant même surface, quel est celui qui a le plus grand volume? (Sorbonne, 1874.)

30. Trouver le trapèze maximum inscrit dans un demi-cercle. (Sorbonne, 1874.)

31. Trouver le triangle isoscèle maximum inscrit dans un cercle. (Sorbonne, 1874.)

32. Quel est le plus grand prisme qu'on puisse déduire d'une pyramide, par une section parallèle à la base. (Sorbonne, 1873.)

33. Quel est le cône maximum inscrit dans une sphère? (Sorbonne, 1873.)

34. Quel est le cylindre maximum inscrit dans un cône? (Sorbonne, 1873.)

35. Quel est le cylindre maximum inscrit dans une sphère? (Sorbonne, 1874.)

36. Étant donnée une droite AB dont la longueur est de 575^m, partager cette droite en deux parties AC, BC telles, que la valeur de $\overline{AC}^2 + \overline{3BC}^2$ soit la moindre possible. Donner cette moindre valeur. (Sorbonne, 1872.)

37. Sur la ligne AB égale à 1^m, on prend un point O entre A et B; on construit le demi-triangle équilatéral AOE sur la partie AO et le carré OBCD sur la partie OB. Cela posé, la surface du pentagone ABCDE dépend de la position du point O sur AB, et l'on demande : 1° de déterminer la position du point O qui convient au maximum ou au minimum du pentagone ABCDE; 2° de calculer ces surfaces maxima ou minima à 0,0001 près de leurs valeurs. (Sorbonne, 1875.)

38. On donne les hauteurs h et h' de deux cylindres, déterminer leurs rayons de manière que la somme de leurs surfaces latérales soit égale à celle d'une sphère de rayon A et que celle de leurs volumes soit minimum. (Sorbonne, 1875.)

39. De tous les rectangles inscrits dans un triangle donné, quel est celui dont la surface est maximum? (Sorbonne, 1875.)

COURBES USUELLES.

1° THÉORIES DEMANDÉES AUX EXAMENS ÉCRITS, DE 1863 A 1875.

Dans la parabole, le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe est proportionnel à la distance de cette corde au sommet. (Sorbonne, 1863, 1865, 1866, 1869.)

Construire la tangente à l'ellipse par un point extérieur à la courbe. (Sorbonne, 1866, 1867, 1868, 1868, 1872.)

Construire la tangente à la parabole par un point extérieur à la courbe. (Sorbonne, 1868, 1869.)

La tangente à l'ellipse fait avec les rayons vecteurs menés des foyers au point de contact des angles égaux. (Sorbonne, 1868.)

Mener une tangente à l'ellipse parallèlement à une droite donnée. (Sorbonne, 1869.)

Démontrer que la tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur qui va du foyer au point de contact et une parallèle à l'axe. (Sorbonne, 1870.)

2° PROBLÈMES.

40. Étant donnée une ellipse par ses foyers et son grand axe, lui mener des tangentes parallèles à une droite donnée; déterminer les points de contact des tangentes ainsi obtenues, et faire connaître la direction pour laquelle elles seront le plus rapprochées l'une de l'autre. (Sorbonne, 1873.)

41. Le grand axe d'une ellipse égale 126 mètres, la distance focale égale 84 mètres ; on élève en F la perpendiculaire F'D sur le grand axe et l'on joint DF'. Calculer les longueurs FD, F'D.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

1° THÉORIES ET ÉPURES DEMANDÉES AUX EXAMENS.

Définir la projection d'une droite et démontrer que la projection d'une droite est une droite. (Sorbonne, 1870.)

Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan. (Sorbonne, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872.)

Trouver l'angle de deux droites, dont l'une est parallèle au plan horizontal, et l'autre parallèle au plan vertical. (Sorbonne, 1870.)

Lorsque les projections d'une droite sur les deux plans de projection sont perpendiculaires aux traces d'un plan, la droite est perpendiculaire au plan. (Sorbonne, 1870.)

Les projections d'une droite perpendiculaire à un plan sont perpendiculaires aux traces de ce plan, et réciproquement. (Sorbonne, 1868, 1868, 1869, 1871, 1872.)

Étant données les projections horizontales et verticales d'une droite, trouver les traces de cette droite, ainsi que les angles qu'elle forme avec les plans de projection. (Sorbonne, 1865.)

Étant données les traces horizontales et verticales de deux plans parallèles à la ligne de terre, construire les projections de l'intersection. (Sorbonne, 1865.)

Par un point donné mener un plan perpendiculaire à une droite donnée. (Sorbonne, 1872.)

Ligne de plus grande pente d'un plan incliné; démontrer que

cette ligne est perpendiculaire à la trace horizontale du plan incliné. (Sorbonne, 1865.)

Distance d'un point à un plan. Épure. (Sorbonne, 1868, 1868, 1869.)

Distance d'un point à une droite. Épure. (Sorbonne, 1869, 1869, 1871, 1872, 1872.)

Trouver l'angle de deux droites. Épure. (Sorbonne, 1868, 1871.)

Trouver l'angle d'une droite et d'un plan. Épure. (Sorbonne, 1868.)

Trouver l'angle de deux plans donnés par leurs traces. Épure. (1866, 1868, 1871, 1872.)

Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée. (Sorbonne, 1869.)

2° PROBLÈMES.

42. Étant donné le rayon de la base d'un cylindre droit, ainsi que le pas d'une hélice tracée sur la surface de ce cylindre, construire les projections de l'hélice et de la tangente en un point de cette courbe sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre. (Sorbonne, 1872.)

43. Faire à main levée et expliquer l'épure qui donnerait les traces de l'un des plans bissecteurs des angles formés par deux plans donnés par leurs traces. (Sorbonne, 1873.)

44. Faire à main levée et expliquer l'épure qui donnerait les projections de la bissectrice de l'un des angles de deux droites données par leurs projections. (Sorbonne, 1873.)

45. Tracer et expliquer l'épure de la distance d'un point à un plan, lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre. (Sorbonne, 1873.)

46. Connaissant la trace horizontale d'un plan et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, construire sa trace verticale. (Sorbonne, 1873.)

47. Construire la trace verticale d'un plan, connaissant sa trace horizontale et l'angle de ses deux traces. (Sorbonne, 1873.)

48. Expliquer comment on trouve, en Géométrie descriptive, l'angle de deux droites données par leurs projections. Faire l'épure à main levée. (Sorbonne, 1873.)

49. Expliquer l'épure au moyen de laquelle on détermine l'angle de deux plans donnés par leurs traces. (Sorbonne, 1874.)

50. Tracer à main levée l'épure de l'angle de deux droites, dans le cas où l'une de ces droites est parallèle au plan horizontal sans l'être au plan vertical. (Sorbonne, 1874.)

51. On donne la trace verticale d'un plan et l'angle qu'il forme avec le plan horizontal; déterminer sa trace horizontale. (Sorbonne, 1874.)

52. Étant données les projections d'une droite et celle d'un point, trouver la plus courte distance du point à la droite. (Sorbonne, 1874.)

53. Les traces d'un plan P font avec la ligne de terre des angles α et β; exprimer la tangente de l'angle que fait le plan P avec la ligne de terre, au moyen des tangentes des deux angles α et β. (Sorbonne, 1876.)

54. Construire l'angle d'un plan représenté par ses traces et d'une droite représentée par ses projections. (Sorbonne, 1876.)

COSMOGRAPHIE.

1° THÉORIES POSÉES AUX EXAMENS, DE 1863 A 1873.

Précession des équinoxes. (Sorbonne, 1866.)
Des planètes. (Sorbonne, 1867.)
De la Terre. (Sorbonne, 1869, 1871.) (V. *Atlas*.)
Soleil. (Sorbonne, 1869.)
Lune. (Sorbonne, 1869.)
Coordonnées célestes. (Sorbonne, 1869.)
Cartes géographiques. (Sorbonne, 1872.)

2° PROBLÈMES.

55. La révolution de la Terre autour du Soleil s'accomplit en 365 jours, 256, calculer le demi-grand axe de l'ellipse décrite par une planète dont la révolution se fait en 1143 jours, 796; on prendra pour unité de longueur le demi-grand axe de l'ellipse de la Terre. (Sorbonne, 1865.)

56. La Terre étant regardée comme sphérique, calculer avec six chiffres décimaux le rapport de la surface de la zone torride à la surface entière de la Terre. On admettra que les deux tropiques qui limitent cette zone sont à 23°27′32″ de l'équateur. (Sorbonne, 1870.)

57. Le méridien terrestre étant regardé comme une ellipse dont le demi-grand axe est égal à 6377 kilomètres, et le demi-petit

axe égal à 6356 kilomètres, on propose de calculer à 1 kilomètre près la distance des deux foyers de cette ellipse. (Sorbonne, 1874.)

58. La différence des latitudes de deux villes égale 9°39′11″. Calculer en lieues de 4 kilomètres la distance de ces deux villes, en supposant la circonférence de la Terre égale à 40000 kilomètres. (Sorbonne, 1874.)

59. Deux points situés sur le même méridien sont distants de 57027 toises. Quel est l'angle des verticales de ces deux points? Une toise égale $1^m,949$, et l'on suppose le rayon du méridien égal à 6366000 mètres. (Sorbonne, 1874.)

60. Calculer à 1 mètre près l'arc du parallèle terrestre dont la latitude est 48°50′, sachant que la différence des longitudes de ses deux extrémités égale 3°,36′. On prendra la circonférence de la Terre égale à 40000000 mètres. (Sorbonne, 1875.)

61. La Terre étant supposée sphérique, calculer la surface de la zone comprise entre l'équateur et un parallèle ayant pour latitude 45 degrés. On prendra la circonférence de la Terre égale à 40000 kilomètres. (Sorbonne, 1876.)

62. Calculer à un myriamètre carré près la surface de l'une des deux zones glaciales, en supposant que le cercle polaire qui la limite est 23°30′ du cercle. On prendra la circonférence de la Terre égale à 4000 myriamètres. (Sorbonne, 1876.)

63. Le grand axe de l'orbite de Mars étant supposé égal à 1,52369, quelle est en jours la durée de la révolution de cette planète, sachant que pour la Terre, dont le grand axe de l'orbite est pris pour unité, le temps de la révolution est de 365j,25638? (Sorbonne, 1876.)

64. La distance moyenne de la Terre au Soleil étant prise pour unité, celle de Jupiter au Soleil est égale à 5,2; calculer à l'aide de la troisième loi de Képler le nombre d'années que dure une révolution de Jupiter. (Sorbonne, 1876.)

MÉCANIQUE.

1° THÉORIES DEMANDÉES AUX EXAMENS ÉCRITS DE LA SORBONNE.

1° Composition des forces parallèles. (Sorbonne, 1869, 1871.)

2° Centre de gravité. (Sorbonne, 1870.)

3° Équilibre des forces. (Sorbonne, 1870.)

4° Machines simples. (Sorbonne, 1870, 1872.)

5° Conditions d'équilibre d'un corps placé sur un plan incliné. (Sorbonne, 1875.)

6° Machine d'Atwood. (Sorbonne, 1876.)

7° Expliquer les conditions d'équilibre d'un treuil sollicité par deux forces parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe du treuil. (Sorbonne, 1876.)

8° Énoncer et démontrer les conditions d'équilibre du levier sollicité par deux forces. On néglige le poids du levier. (Sorbonne, 1876.)

2° PROBLÈMES.

65. On pèse un corps dans l'un des plateaux d'une balance. et l'on constate que, pour lui faire équilibre, il faut placer dans l'autre plateau un poids de 1 kilogramme. On le place ensuite dans l'autre plateau, et l'on trouve qu'il faut 1200 grammes placés dans le premier pour que l'équilibre persiste. On demande quel est le rapport qui existe entre les longueurs des deux bras de cette balance et quel est le poids réel de ce corps. (Sorbonne, 1858.)

66. Dans une machine d'Atwood, les poids égaux suspendus aux extrémités du fil pèsent chacun 50 grammes; sur l'un des

poids on ajoute une masse qui met le système en mouvement, et l'on constate que l'espace parcouru en 3 secondes est égal à 108 centimètres. On demande quel est le poids de la masse additionnelle. On sait que l'intensité de la pesanteur dans le lieu où l'on fait l'expérience est de 9,8088. — On néglige les influences perturbatrices dues au frottement, au poids du fil et à la mise en mouvement de la poulie. (Sorbonne, 1858.)

67. Deux mobiles partent en même temps de deux points A et B et marchent sur la droite AB dans un même sens, A poursuivant B; le premier parcourt 1 mètre dans la première minute, 3 mètres dans la deuxième, 5 mètres dans la troisième, et ainsi de suite, de sorte que la vitesse croisse en progression arithmétique; le second parcourt 3 mètres dans la première minute, 4 mètres dans la deuxième, 5 mètres dans la troisième, et ainsi de suite. On demande après combien de minutes le mobile A atteindra le mobile B, sachant que la distance AB est 75 mètres. (Sorbonne, 1858.)

68. On laisse tomber une pierre dans un puits; on demande de calculer la profondeur de ce puits, sachant qu'il s'est écoulé $0^s,58$ entre l'instant où la pierre commence à se mouvoir et le moment où l'on a entendu le bruit de sa chute. (Sorbonne, 1860.)

69. Deux mobiles sont successivement lancés de bas en haut avec une même vitesse égale à 100 mètres. Quel est l'intervalle de temps qui doit séparer les époques de leur départ pour que le second se meuve $8^s,7$ avant de rencontrer le premier? — On négligera la résistance de l'air. (Sorbonne, 1873.)

70. Deux mobiles, abandonnés sans vitesse initiale à l'action de la pesanteur, sont partis du même point de l'espace à une seconde d'intervalle l'un de l'autre. On demande au bout de combien de temps la distance qui les sépare sera devenue égale à 98 mètres. (Sorbonne, 1875.)

71. Un paquebot faisant le service de Douvres à Calais fait la traversée en deux heures par un vent favorable; au sortir de Calais, le vent lui est contraire; il fait 6 milles de moins que par un temps favorable; à moitié route, le vent change un peu et sa

vitesse augmente de 2 milles. Il se trouve qu'arrivé à Douvres il a mis les $\frac{4}{7}$ du temps qu'il eût mis si sa vitesse eût été tout le temps la même que dans la première moitié. On demande la distance de Douvres à Calais et les deux vitesses. (Sorbonne, 1874.)

72. Un corps pesant est lancé verticalement de haut en bas avec une vitesse initiale de 3 mètres; au bout de combien de temps de chute aura-t-il parcouru 30 mètres? L'unité de temps est la seconde, et la valeur de g est 9,8088. (Sorbonne, 1874.)

73. Un corps se compose de deux parties qui pèsent 12 kilogrammes et 8 kilogrammes et dont les centres de gravité sont A et B. La distance AB $= 0^m,35$. On demande à quelle distance des points A et B se trouve le centre de gravité du corps entier. (Sorbonne, 1875.)

74. Un projectile est lancé avec une vitesse de 200 mètres à la seconde; 5 secondes après l'instant du départ on entend le bruit produit par le choc du projectile contre un obstacle solide : la température est zéro; on demande à quelle distance l'observateur se trouve de l'obstacle. (Le projectile est parti de l'endroit même où se trouve l'observateur.) On cherchera encore quelle variation surviendrait dans le temps qui sépare le départ du projectile du moment où l'on entend le bruit du choc contre l'obstacle, si la température s'élevait à 40 degrés C. (Sorbonne, 1868.)

75. Dans une machine d'Atwood, les poids suspendus aux deux extrémités du fil sont chacun égaux à 100 grammes; on demande ce que doit peser la masse additionnelle pour que l'espace parcouru, dans les deux premières secondes de chute, par celui des deux poids sur lequel cette masse est posée, soit de 4 décimètres. On sait que la vitesse acquise en une seconde de temps par les corps qui tombent librement est $9^m,8088$. On néglige l'influence de la poulie et le poids du fil. (Sorbonne, 1875.)

76. Trouver le centre de gravité du périmètre d'un triangle. (Sorbonne, 1876.)

77. Trouver la résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées à deux points A, B d'un corps solide. (Sorbonne, 1873.)

78. Conditions d'équilibre d'un corps pesant placé sur un plan incliné et sollicité par une force faisant un angle donné avec le plan. Quel doit être cet angle pour que la force soit minimum? (Sorbonne, 1875.)

79. On lance un corps verticalement de bas en haut, en lui imprimant une vitesse initiale de 35 mètres par seconde. Quel temps mettra-t-il pour revenir à son point de départ? On fait abstraction de la résistance de l'air, et l'on suppose que $g = 9,8088$. (Sorbonne, 1875.)

80. Calculer combien de temps un mobile lancé de bas en haut dans le vide, avec une vitesse de 100 mètres, emploie pour revenir à son point de départ. (Sorbonne, 1876.)

81. Dans une machine d'Atwood, les deux masses principales pèsent chacune 240 grammes. Quel doit être le poids additionnel pour que l'espace parcouru dans la première seconde soit égal à 1 décimètre? (Sorbonne, 1876.)

TABLE DES MATIÈRES

QUESTIONS.

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

Pages.

Théorie et applications..... 1

CHAP. I. — ERREURS ABSOLUES.

Addition..... 3
Soustraction..... 5
Multiplication..... 6
Division..... 14
Puissances..... 18
Racines..... 19

CHAP. II. — ERREURS RELATIVES.

Addition et soustraction..... 22
Multiplication..... 22
Division..... 25
Puissances et racines..... 26

MAXIMA ET MINIMA.

Théorie et questions..... 29

PROBLÈMES.

Arithmétique et Algèbre..... 37
Géométrie..... 40

COURBES USUELLES.

Pages.
Théories demandées aux examens écrits, de 1863 à 1875.. 43
Problèmes..... 43

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Théories et épures demandées aux examens..... 45
Problèmes.. 46

COSMOGRAPHIE.

Théories posées aux examens, de 1863 à 1873..... 49
Problèmes..... 49

MÉCANIQUE.

Théories demandées aux examens écrits de la Sorbonne..... 51
Problèmes..... 51

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-77.

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-76.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉES A LA SORBONNE DE 1853 A 1876

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE, DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1846 A 1876,

ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION.

TROISIÈME PARTIE.

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (THÉORIE ET APPLICATIONS), MAXIMA ET MINIMA (THÉORIE ET QUESTIONS), COURBES USUELLES, GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, COSMOGRAPHIE, MÉCANIQUE.

SOLUTIONS.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1877

(Tous droits réservés.)

RECUEIL

DE PROBLÈMES

SOLUTIONS (*)

MAXIMA ET MINIMA.

1° ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

1. Posons $\frac{x^2+1}{x} = m$, nous en tirons $x^2 - mx + 1 = 0$, équation d'où l'on tire pour x la valeur

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1}.$$

Pour que x soit réel, il faut que la quantité soumise au radical soit positive; cette quantité peut se décomposer en deux facteurs

$$\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right);$$

ils doivent donc toujours être de même signe.

Il faut donc que m soit plus grand que 2 ou plus petit que -2, mais il ne peut prendre aucune valeur entre ces deux limites.

(*) Les lettres (S.), placées à droite, sont destinées à appeler l'attention du lecteur sur les lignes renfermant les *solutions* des problèmes.

Nous dirons donc que -2 (S.) est le maximum de l'expression proposée, et $+2$ (S.) le minimum.

2. En appelant m^2 le maximum ou le minimum cherché, nous aurons

$$x + y = 27,$$
$$4x^2 + 5y^2 = m^2.$$

Éliminant x, on trouve

$$y = \frac{108 \pm \sqrt{108^2 - 9\,(2916 - m^2)}}{9}.$$

La quantité sous le radical devant rester positive, m^2 ne peut prendre une valeur moindre que 1620, qui est le minimum cherché. Les parties de 27 sont d'ailleurs $x = 15$ et $y = 12$. (S.)

3. Posons

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1} = m;$$

nous avons, en chassant le dénominateur et ordonnant l'équation,

$$x^2\,(1 - m) + 3x + 5 - m = 0,$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\,(1 - m)\,(5 - m)}}{2\,(1 - m)}.$$

En décomposant la quantité soumise au radical en deux facteurs du premier degré en m, on trouve, en faisant sortir du radical le facteur 4,

$$x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{\left(\frac{11}{2} - m\right)\left(m - \frac{1}{2}\right)}}{2\,(1 - m)}.$$

Il est évident que, si l'on a $m > \frac{11}{2}$ ou $m < \frac{1}{2}$, la quantité soumise au radical sera négative, un des facteurs étant positif, l'autre négatif. Donc il y a un minimum pour $m = \frac{11}{2}$ (S.) et un maximum $m = \frac{1}{2}$. (S.)

D'ailleurs les valeurs de x sont, pour le maximum, $x = -3$, pour le minimum, $x = \frac{1}{3}$.

4. Appelons pour un moment a le nombre à partager, $\sqrt{m}$ et

$\sqrt{n}$ les coefficients des racines des parties et M le maximum cherché. Nous devons satisfaire aux équations

$$x + y = a,$$

$$\sqrt{mx} + \sqrt{ny} = M,$$

d'où l'on tire, par l'élimination de y,

$$(m+n)x^2 + 2[(n-m)M - an(m+n)]x + (an - M)^2 = 0.$$

Les valeurs de x devant être réelles, la plus grande valeur de x sera celle qui annulera le binôme $b^2 - 4ac$ de l'équation du second degré.

Ici cette condition est

$$[(n-m)M - an(m+n)]^2 - (m+n)^2(an - M)^2 = 0.$$

Cette équation admet pour racines $M = 0$, et l'autre s'obtient en égalant les carrés, d'où

$$M = a(m+n),$$

et alors

$$x = m\frac{a}{m+n},$$

$$y = n\frac{a}{m+n}.$$

Il faut donc partager a proportionnellement à m et n, et dans le cas présent, proportionnellement à 9 et 16, ce qui donne

$$x = 441, \quad (S.)$$
$$y = 784. \quad (S.)$$

5. Je pose

$$\frac{3x^2 - 12x + 1}{x^2 + 2} = m.$$

Chassant le dénominateur et réduisant, il vient

$$x^2(3-m) - 12x + 1 - 2m = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - (3-m)(1-2m)}}{3-m}.$$

La quantité sous le radical, développée et ordonnée, est égale à

$$-2m^2+7m+33.$$

J'égale cette quantité à 0, ce qui me donne l'équation

$$2m^2-7m-33=0,$$

d'où, en résolvant,

$$m=\frac{7\pm\sqrt{49+264}}{4}=\frac{7\pm 17,691}{4}.$$

Désignant par m' la plus petite racine et par m'' la plus grande, j'aurai

$$m'=-2,672,$$
$$m''=+6,172.$$

Le trinôme contenu sous le radical sera donc égal à

$$-2(m+2,672)(m-6,172).$$

Pour qu'il soit positif, ce qui est la condition de réalité de x, je vois que m doit prendre des valeurs comprises entre $-2,672$ d'une part et $+6,172$ d'autre part. Donc le maximum de la fraction proposée est 6,172, et son minimum est $-2,672$. Les valeurs de x correspondantes s'obtiendront en remplaçant dans la valeur de x m successivement par ces deux valeurs, ce qui donne :

Pour le maximum,

$$x=\frac{6}{3-6,172}=-1,89;\quad (S.)$$

Pour le minimum,

$$x=\frac{6}{3+2,672}=1,05.\quad (S.)$$

6. 1° Soient x et y les côtés de ces cubes, on aura

(1) $$x+y=5,$$

(2) $$x^3+y^3=56,6.$$

Divisons (2) et (1) membre à membre, on aura

(3) $$x^2-xy+y^2=11,32.$$

Élevant (1) au carré, on aura

(4) $$x^2+2xy+y^2=25.$$

Retranchant (3) de (4), on aura

$$3xy = 13{,}68,$$

d'où

$$xy = 4{,}56.$$

Connaissant ainsi la somme et le produit des deux inconnues x et y, on sait quelles sont les racines de l'équation

$$X^2 - 5X + 4{,}56 = 0,$$

qui donne

$$X' = x = 3^m{,}8, \quad X'' = y = 1^m{,}2.$$

2° Désignons par m la valeur variable de l'expression $x^2 + y^2$, on aura les équations

$$x + y = 5,$$
$$x^2 + y^2 = m.$$

Opérant comme précédemment, on arrivera à cette conclusion que x et y seront les racines de l'équation

$$X^2 - 5X + \frac{125 - m}{15} = 0.$$

Cette équation n'aura ses racines réelles qu'autant que les valeurs de m satisferont à la condition

$$\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0,$$

c'est-à-dire ici

$$m \geqslant 31{,}25.$$

La valeur minimum de la somme des volumes sera donc 31,25 (S.), et elle sera obtenue pour $x = y = 2{,}5$.

7. Posons

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = y,$$

d'où l'on tire

$$x^2(1 - y) + 4xy - 3y + 1 = 0;$$

résolvant cette équation du second degré par rapport à x, il vient

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 1}}{1 - y}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, il faut que

$$y^2 + 4y - 1 \geqslant 0,$$

d'où, en ajoutant et retranchant 4 au premier membre de cette inégalité, il vient

$$(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2 > 0,$$

ou

$$(y+2+\sqrt{5})(y+2-\sqrt{5}) > 0.$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite, il faut que

$$(1)\begin{cases} y+2+\sqrt{5} > 0, \\ y+2-\sqrt{5} > 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2)\begin{cases} y+2+\sqrt{5} < 0, \\ y+2-\sqrt{5} < 0. \end{cases}$$

Les inégalités (1) peuvent se remplacer par

$$y+2-\sqrt{5} > 0.$$

Les inégalités (2) peuvent se remplacer par

$$y+2+\sqrt{5} < 0.$$

Ainsi les valeurs de y doivent être ou positives et plus grandes que

$$-2+\sqrt{5},$$

et $-2+\sqrt{5}$ (S.) est un minimum de ces valeurs positives; ou elles doivent être négatives et plus petites que $-2-\sqrt{5}$, et $-2-\sqrt{5}$ (S.) est un maximum de ces valeurs négatives.

8. Nous avons l'équation

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3} = m,$$

ou

$$(m-1)x^2 - 4mx + 3m - 1 = 0,$$

de laquelle on tire

$$(1) \qquad x = \frac{2m \pm \sqrt{m^2 - 4m + 1}}{m-1}.$$

Pour que la variable x soit réelle, il est nécessaire et suffisant que la quantité placée sous le radical soit positive. Ainsi la quantité m prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme $m^2 - 4m + 1$, et n'en prendra pas d'autre. L'équa-

tion $m^2 - 4m + 1$ a ses racines réelles $m = 2 \pm \sqrt{3}$, car $\sqrt{3} = 1,732\ldots$. Appelons m' la plus petite racine, m'' la plus grande; le trinôme se mettra sous la forme

$$(m - m')(m - m'') \quad \text{ou} \quad (m - 2 - \sqrt{3})(m - 2 + \sqrt{3}).$$

La condition pour que la valeur de x tirée de la relation (1) soit réelle étant

$$(m - 2 - \sqrt{3})(m - 2 + \sqrt{3}) > 0,$$

il y aura un maximum

$$m = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad m = 3,732,$$

lequel répond à

$$x = 2,732, \quad (\text{S.})$$

et un minimum

$$m = 2 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad m = 0,268,$$

lequel répond à

$$x = -0,422. \quad (\text{S.})$$

9. On a l'équation

$$x + \frac{1}{x} = m, \quad \text{ou} \quad x^2 - mx + 1 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1};$$

la condition de réalité est

$$\frac{m^2}{4} > 1;$$

le minimum de la fonction est donc $m = 2$, et ce minimum correspond à $x = 1$. (S.)

10. Posons

$$\frac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1} = m;$$

nous en déduisons

$$(m - 5)x^2 - 8x + m + 1 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-(m+3)(m-7)}}{m - 5}.$$

La quantité sous le radical est positive pour toutes les valeurs

de m comprises entre -3 et $+7$, et elle est négative pour toutes les autres valeurs. Ainsi, quand x prend toutes les valeurs possibles, la fraction proposée varie entre -3 (S.) et $+7$, sans jamais sortir de ces limites. Par suite, -3 est un minimum et $+7$ (S.) un maximum.

11. De la relation donnée $ax + by = c$ on tire

$$y = \frac{c - ax}{b};$$

on substitue cette valeur de y dans $x^2 + y^2 = m$ et l'on a

$$x^2 + \left(\frac{c - ax}{b}\right)^2 = m,$$

ou bien

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2acx + c^2 - b^2m = 0.$$

Résolvant,

$$x = \frac{ac \pm \sqrt{a^2c^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - b^2m)}}{a^2 + b^2};$$

simplifiant sous le radical, il vient

$$x = \frac{ac \pm b\sqrt{(a^2 + b^2)m - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

On voit alors que, pour que les valeurs de x soient réelles, il faut que $(a^2 + b^2)m$ ne soit pas moindre que c^2; d'où il suit que le minimum demandé est

$$m = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

On trouve pour les valeurs correspondantes de x et de y

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2} \text{ (S.) et } y = \frac{bc}{a^2 + b^2}. \text{ (S.)}$$

12. On a

$$xy = a^2,$$

$$x + y = m;$$

d'où

$$y = \frac{a^2}{x},$$

et par suite

$$x + \frac{a^2}{x} = m,$$

d'où

$$x^2 - mx + a^2 = 0.$$

Résolvant,

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - a^2};$$

$\frac{m^2}{4}$ ne peut être moindre que a^2.

La condition du minimum est donc

$$\frac{m^2}{4} = a^2,$$

d'où

$$m = 2a,$$

èt par suite

$$x = a \quad \text{et} \quad y = \frac{a^2}{a} = a.$$

Donc les deux nombres x et y doivent être égaux à a. (S.)

13. Appelons m la valeur de cette fraction.

$$\frac{x^2}{x-1} = m,$$

ou bien

$$x^2 = mx - m,$$

ou

$$x^2 - mx + m = 0;$$

d'où

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}.$$

Les racines du trinôme sous le radical sont $m' = 0$, $m'' = 4$, et, comme le coefficient de m^2 est positif, le maximum de la fraction est égal à 0 (S.) et le minimum égal à 4 (S.); la fraction varie de $-\infty$ à 0 et de 4 à $+\infty$.

14.

$$\frac{3x}{x^2 + x + 1} = m,$$

$$3x = mx^2 + mx + m,$$

ou bien

$$mx^2 + (m-3)x + m = 0.$$

Résolvant,

$$x = \frac{3 - m \pm \sqrt{(3-m)^2 - 4m^2}}{2m},$$

ou bien

$$x = \frac{3 - m \pm \sqrt{(1-m)(m+3)}}{2m}.$$

D'où il suit que le maximum est

$$m = 1$$

et le minimum

$$m' = -3.$$

Les valeurs correspondantes de x sont

$$x = 1 \quad (S.) \quad \text{et} \quad x' = -1. \quad (S.)$$

15. Soient x et y les deux nombres,

$$xy = P, \quad x + y = m.$$

Remplaçant dans la seconde équation y par $\frac{P}{x}$, on a

$$x + \frac{P}{x} = m, \quad \text{ou} \quad x^2 + P = mx,$$

ou bien

$$x^2 - mx + P = 0,$$

d'où

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4P}}{2}.$$

On doit avoir

$$m^2 \geqslant 4P,$$

d'où

$$m \geqslant 2\sqrt{P}.$$

La plus petite valeur que puisse prendre m est donc $2\sqrt{P}$, et l'on a alors

$$x = y = \sqrt{P}. \quad (S.)$$

16. Soit m la valeur variable de l'expression donnée. On a

$$\frac{2x-3}{x^2+4} = m,$$

d'où

$$2x - 3 = mx^2 + 4m,$$

et enfin

$$mx^2 - 2x + (4m + 3) = 0,$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4m(4m+3)}}{2m} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - m(4m+3)}}{m}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-4m^2 - 3m + 1}}{m}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, il faut qu'on ait sous le radical

$$-4m^2 - 3m + 1 \geqq 0;$$

ou, en appelant m' et m'' les racines de ce trinôme,

$$-4(m - m')(m - m'') \geqq 0.$$

Le coefficient -4 étant négatif, il faut aussi que le produit $(m - m')(m - m'')$ soit négatif, ce qui aura lieu quand m sera compris entre les deux racines, car alors l'une des différences $m - m'$ sera positive et l'autre négative. Donc m peut prendre toutes les valeurs comprises entre m' et m'' et n'en peut pas prendre d'autres. La plus grande et la plus petite valeur de m sont donc la plus grande et la plus petite racine du trinôme

$$-4(m - m')(m - m'') = -4m^2 - 3m + 1.$$

En égalant à zéro, on trouve

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 4 \times 1}}{-2 \times 4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-8},$$

d'où

$$m' = -1, \quad m'' = \frac{1}{4}.$$

Ces valeurs sont données par les valeurs correspondantes de x, dans lesquelles le radical s'annule, savoir :

$$x' = -1, \quad (S.) \qquad x'' = 4. \quad (S.)$$

17. Posons

$$\frac{2x-1}{x^2+1}=m.$$

Chassant le dénominateur et ordonnant, il vient

$$mx^2-2x+m+1=0;$$

d'où

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-m^2-m}}{m}=\frac{1\pm\sqrt{-m^2-m+1}}{m};$$

mais

$$-m^2-m+1=-(m-m')(m-m''),$$

en désignant par m' et m'' les racines de l'équation

$$m^2+m-1=0.$$

Résolvant cette équation, on a

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},$$

d'où

$$m'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

$$m''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

on a donc pour x

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-(m-m')(m-m'')}}{m},$$

x étant imaginaire pour toute valeur de m inférieure à m' ou supérieure à m'', mais réel pour toute valeur de m comprise entre m' et m''.

Le minimum de m est

$$m'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-1,61\ldots,$$

le maximum

$$m''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0,61\ldots.$$

Les valeurs correspondantes de x sont

$$x' = \frac{1}{m'} = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{4} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -0{,}61\ldots \quad (S.)$$

$$x'' = \frac{1}{m''} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1{,}61\ldots \quad (S.)$$

Les valeurs ont été calculées à 0,01 près par défaut.

Remarque. $x' = -m''$ et $x'' = -m'$; cela provient de ce qu'on a, dans l'exemple actuel, $x' = \frac{1}{m'}$, $x'' = \frac{1}{m''}$ et $m'm'' = -1$.

18. Égalant à m l'expression proposée, nous avons

$$(ax+b)^2 + (a'x+b')^2 = m;$$

développant et ordonnant, il vient successivement

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 + a'^2x^2 + 2a'b'x + b'^2 = m,$$

$$(a^2+a'^2)x^2 + 2(ab+a'b')x + b^2 + b'^2 - m = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-(ab+a'b') \pm \sqrt{(ab+a'b')^2 - (a^2+a'^2)(b^2+b'^2-m)}}{a^2+a'^2},$$

ou, toutes réductions faites,

$$x = \frac{-(ab+a'b') \pm \sqrt{(a^2+a'^2)m - (ab'-ba')^2}}{a^2+a'^2}.$$

Pour que x soit réel, il faut qu'on ait

$$(a^2+a'^2)m - (ab'-ba')^2 \geqslant 0, \quad \text{d'où} \quad m \geqslant \frac{(ab'-ba')^2}{a^2+a'^2}.$$

Le minimum de m est

$$\frac{(ab'-ba')^2}{a^2+a'^2}.$$

La valeur correspondante de x est

$$x = \frac{-(ab + a'b')}{a^2 + a'^2}.$$

19. (Donnée déjà le 19 avril 1876). — Egalant à m et résolvant par rapport à x, on a

$$\frac{2ax + b}{x^2 + 1} = m, \quad \text{d'où} \quad mx^2 - 2ax + m - b = 0,$$

d'où enfin

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - m(m - b)}}{m} = \frac{a \pm \sqrt{-m^2 + bm + a^2}}{m}.$$

Les racines des trinômes placées sous le radical sont

$$m' = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}, \quad m'' = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2},$$

de sorte que

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-(m - m')(m - m'')}}{m}.$$

Pour que x soit réelle, il faut que m soit compris entre m' et m''.

La plus petite racine $m' = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}$ est donc un minimum.

La plus grande racine $m'' = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}$ est un maximum.

Les valeurs de x correspondantes au maximum et au minimum sont respectivement

$$x = \frac{a}{m'} = \frac{2a}{b - \sqrt{b^2 + 4a^2}} = \frac{2a\left(b + \sqrt{b^2 + 4a^2}\right)}{(b - \sqrt{b^2 + 4a^2})(b + \sqrt{b^2 + 4a^2})}$$

$$= \frac{2a\left(b + \sqrt{b^2 + 4a^2}\right)}{b^2 - b^2 - 4a^2} = \frac{-\left(b + \sqrt{b^2 + 4a^2}\right)}{2a},$$

$$x = \frac{a}{m''} = \frac{2a}{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}} = \frac{2a\left(b - \sqrt{b^2 + 4a^2}\right)}{(b + \sqrt{b^2 + 4a^2})(b - \sqrt{b^2 + 4a^2})}$$

$$= \frac{2a\left(b - \sqrt{b^2 + 4a^2}\right)}{b^2 - b^2 - 4a^2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4a^2} - b}{2a}.$$

Dans le cas où le maximum et le minimum sont égaux, le premier à $+4$, le second à -1, on a, pour déterminer a et b,

$$\frac{b+\sqrt{b^2+4a^2}}{2}=4 \quad \text{ou} \quad \sqrt{b^2+4a^2}+b=8,$$

$$\frac{b-\sqrt{b^2+4a^2}}{2}=-1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{b^2+4a^2}-b=2;$$

ces dernières équations donnent par l'addition et la soustraction

$$2\sqrt{b^2+4a^2}=10 \quad \text{ou} \quad \sqrt{b^2+4a^2}=5,$$
$$2b=6 \quad \text{ou} \quad b=3;$$

substituant à b sa valeur 3 dans $\sqrt{b^2+4a^2}=5$, il vient

$$\sqrt{9+4a^2}=5,$$

d'où successivement

$$9+4a^2=25, \quad 4a^2=16, \quad a^2=4, \quad a=\pm 2.$$

Ainsi on a les deux systèmes de solutions

$$\begin{matrix} a=-2 \\ b=\ \ 3 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a=+2, \\ b=\ \ 3. \end{cases}$$

20. Posons

$$2x^2-5x+7=m, \quad \text{d'où} \quad 2x^2-5x+7-m=0,$$

et résolvons par rapport à x. Nous aurons

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-8(7-m)}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{8m-31}}{4}.$$

Pour que x soit réel, il faut qu'on ait

$$8m-31\geqslant 0,$$

d'où

$$m\geqslant\frac{31}{8}.$$

$\frac{31}{8}$ est le minimum de m; la valeur correspondante de x est $x=\frac{5}{4}$.

2° GÉOMÉTRIE.

21. Soient x et y les côtés du rectangle, R le rayon du cercle, nous aurons à rendre maximum le produit xy; d'ailleurs on a la relation $x^2 + y^2 = R^2$. Le produit xy sera maximum en même temps que son carré x^2y^2. Mais les facteurs x^2 et y^2 ont pour somme constante R^2; le maximum aura donc lieu pour $x^2 = y^2$, ou $x = y$. Le rectangle maximum est donc le carré. (S.)

22. Soient R le rayon du cylindre, h sa hauteur, x et y les dimensions de la base du parallélépipède, son volume sera xyh. Le facteur h étant constant, je n'ai à rendre maximum que le produit xy ou son carré x^2y^2. Comme $x^2 + y^2 = 4R^2 = \text{const.}$, il faudra, pour que le volume du parallélépipède soit maximum, que $x^2 = y^2$ ou $x = y$. C'est donc le parallélépipède qui a pour base le carré inscrit dans la base du cylindre. (S.)

23. La formule qui donne la surface d'un triangle en fonction des côtés est

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

S^2 sera maximum en même temps que S; dans la valeur de S^2, il y a un facteur constant p : il suffit donc de rendre maximum

$$(p-a)(p-b)(p-c).$$

Or la somme de ces trois facteurs est constante : elle vaut p. Donc le produit sera maximum pour

$$(p-a) = (p-b) = (p-c),$$
$$a = b = c.$$

Le triangle de surface maximum est donc le triangle équilatéral. (S.)

24. Soient x et y les côtés de l'angle droit, a l'hypoténuse. La surface du triangle est $\frac{1}{2}xy$; je puis considérer simplement xy ou le carré x^2y^2; or on sait que

$$x^2 + y^2 = a^2 = \text{const.}$$

Donc, pour que la surface soit maximum, il faut que $x^2 = y^2$, c'est-à-dire $x = y$.

C'est donc le triangle rectangle isoscèle. (S.)

25. Soient a, b, c les trois arêtes, le périmètre deviendra $4a + 4b + 4c$ et le volume abc.

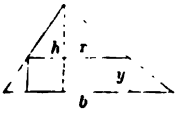
Au lieu de a, b, c, je puis considérer le produit $4a \times 4b \times 4c$; la somme des trois facteurs est constante : donc le maximum aura lieu pour $4a = 4b = 4c$, ou $a = b = c$.

Le plus grand parallélépipède est donc le cube. (S.)

26. Soient D le diamètre de la sphère, x, y, z les dimensions du parallélépipède, son volume sera xyz. Je puis considérer $x^2y^2z^2$, mais je sais que la somme $x^2 + y^2 + z^2 = D^2 = \text{const.}$; par conséquent $x^2y^2z^2$ sera maximum pour $x^2 = y^2 = z^2$, c'est-à-dire $x = y = z$.

Donc le plus grand parallélépipède rectangle inscrit dans une sphère est le cube. (S.)

27. Soient x et y les dimensions du rectangle, b et h celles du triangle; la surface à rendre maximum est xy. Or nous avons des triangles semblables qui donnent



$$\frac{h}{h-y} = \frac{b}{x},$$

$$hx + by = bh,$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1.$$

Au lieu de xy, je puis considérer le produit

$$\frac{x}{b} \times \frac{y}{h}.$$

Alors j'ai deux facteurs dont la somme est constante; pour que le produit soit maximum, il faut que

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{h};$$

d'ailleurs $\frac{x}{h}+\frac{y}{b}=1$; donc il faut que

$$x=\frac{1}{2}b,$$

$$y=\frac{1}{2}h.$$

Le rectangle maximum est donc celui dont les dimensions sont moitié de celles du triangle. (S.)

28. Soit x la distance du point cherché au point A, celle au point B sera $(225-x)$, et nous devrons avoir

$$3,75+0,008\,(x)=4,75+0,008\,(225-x),$$

$$0,008\times 2x=1+0,008\times 225,$$

$$x=\frac{2,800}{0,016}=175^{\text{km}},\quad (\text{S.})$$

$$225-x=225-175=50^{\text{km}}.$$

Il est clair que, si l'on avance vers A ou vers B, on aura moins de frais de transport à payer en faisant venir le charbon du point dont on s'est rapproché. Le point où le charbon coûte le même prix, qu'il vienne de A ou de B, est donc aussi le point de AB où il coûte le plus cher.

29. Appelons S la surface, a, b, c les trois arêtes, nous avons

$$S=2ab+2ac+2bc=2\,(ab+ac+bc).$$

Si donc S est constant, il en sera de même de $(ab+ac+bc)$. Or le volume a pour expression abc; il deviendra maximum en même temps que $a^2b^2c^2$, qu'on peut écrire $ab\times ac\times bc$.

La somme de ces trois facteurs étant constante, le produit sera maximum quand on aura

$$ab=ac=bc;$$

$$a=b=c.$$

C'est donc le cube qui répond à la question. (S.)

30. Soient R le rayon du cercle, x le demi-côté du trapèze parallèle au diamètre, y la hauteur. La surface du trapèze sera

$$S=(R+x)\,y.$$

Mais on a

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = R^2 - x^2;$$

S deviendra maximum en même temps que S^2 ou $(R + x)^2 y^2$; mettons à la place de y sa valeur; nous aurons

$$(R + x)^2 (R^2 - x^2) = (R + x)^3 (R - x).$$

La somme des deux facteurs vaut $2R$; elle est donc constante, et le produit est maximum pour

$$\frac{R + x}{R - x} = 3, \qquad x = \frac{R}{2}.$$

Le trapèze maximum est donc le demi-hexagone régulier inscrit. (S.)

31. J'appelle R le rayon du cercle, x la demi-base du triangle, y l'excès de la hauteur sur le rayon. Nous avons entre ces quantités la relation $x^2 + y^2 = R^2$, ou $x^2 = R^2 - y^2$. La surface du triangle est $x(R + y)$, qui atteindra la valeur maximum en même temps que le carré $x^2(R + y)^2$; remplaçons x^2 par sa valeur, nous aurons pour le maximum

$$\frac{R + y}{R - y} = 3, \qquad y = \frac{1}{2} R,$$

car la somme des facteurs est constante.

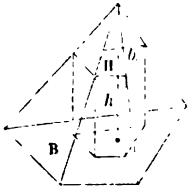
La hauteur du triangle est donc $\frac{3}{2}R$, c'est-à-dire que le triangle maximum est le triangle équilatéral. (S.)

32. Soient B et H la base et la hauteur de la pyramide, b et h les dimensions du prisme. Le volume du prisme est bh. Les polygones B et b sont semblables et, entre eux, comme les hauteurs des pyramides semblables dont ils sont les bases; nous aurons donc

$$\frac{b}{B} = \frac{(H - h)^2}{H^2}, \qquad b = \frac{B}{H^2}(H - h)^2.$$

Le volume du prisme est donc

$$\frac{B}{H^2}(H-h)^2 \times h.$$

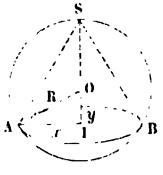


Le maximum aura lieu quand $(H-h)^2 h$ sera maximum, car $\frac{B}{H^2}$ est un facteur constant. Or la somme $H-h+h$ est constante ; donc il faut pour le maximum qu'on ait

$$\frac{H-h}{h}=2, \qquad h=\frac{1}{3}H.$$

La section doit donc être faite au $\frac{1}{3}$ de la hauteur. (S.)

33. Soit SAB ce cône, x le rayon de la base, y l'excès de la hauteur sur le rayon. Le volume du cône est



$$\tfrac{1}{3}\pi x^2 (R+y).$$

D'ailleurs nous avons

$$x^2+y^2=R^2,$$

ou

$$x^2=R^2-y^2.$$

Le volume sera maximum quand $x^2(R+y)$ sera maximum, car $\frac{1}{3}\pi$ est constant, ou maximum en même temps que

$$(R^2-y^2)(R+y)=(R-y)(R+y)^2.$$

La somme des deux facteurs est constante ($=2R$); le maximum exige qu'on ait

$$\frac{R+y}{R-y}=2,$$

$$y=\frac{1}{3}R,$$

$$x=\frac{2}{3}R\sqrt{2}.$$

Ainsi la hauteur est égale au $\frac{1}{3}$ du rayon de la sphère, le rayon de la base égal aux $\frac{2}{3}$ du côté du carré inscrit. (S.)

34. Soient R le rayon de la base du cône, H sa hauteur, x et y le rayon et la hauteur du cylindre inscrit; le volume de ce dernier sera $\pi x^2 y$, expression dans laquelle π est constant et n'influera pas sur le maximum.

D'ailleurs, on a entre les lignes R, H, x et y la relation

$$\frac{H-y}{H}=\frac{x}{R},$$

$$\frac{x}{R}+\frac{y}{H}=1.$$

Au lieu de x^2y, je considère

$$\frac{x^2y}{R^2H} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x}{R}\right)^2\times\frac{y}{H}.$$

La somme de ces derniers facteurs est constante ($=1$), le produit sera maximum pour

$$\frac{x}{R}=2\frac{y}{H},$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}H, \\ x=\frac{2}{3}R. \end{cases}$$

35. Soient R le rayon de la sphère, x le rayon de la base du cylindre, y sa demi-hauteur; le volume sera $2\pi x^2y$, expression dans laquelle 2π n'est pas à considérer. D'ailleurs, nous avons

$$x^2+y^2=R^2.$$

Au lieu de x^2y, considérons x^4y^2, qui devient maximum en même temps que x^2y; écrivons $(x^2)^2y^2$. La somme de ces facteurs est constante ($=R^2$); il y aura donc maximum pour

$$x^2=2y^2,$$

$$3y^2=R^2,$$

$$y=\frac{1}{3}R\sqrt{3},$$

$$x=\frac{1}{3}R\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

La hauteur vaut donc les $\frac{1}{3}$ du côté du triangle équilatéral in-

scrit au grand cercle de la sphère, le rayon de la base le $\frac{1}{3}$ de la diagonale du carré ayant pour côté le côté du triangle équilatéral inscrit au grand cercle. (S.)

36. Soient x et y les deux portions de la droite, nous aurons

$$x + y = a,$$
$$x^2 + 3y^2 = m^2.$$

Éliminant x, on trouve

$$y = \frac{a \pm \sqrt{4m^2 - 3a^2}}{4}.$$

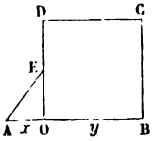
On voit alors que m^2 ne peut être moindre que $\frac{3}{4}a^2$, et, faisant le calcul pour $a = 575^m$, on obtient

$$m^2 = 247\,968^m,75.$$

D'ailleurs il faut que la droite soit divisée au $\frac{1}{4}$ de la longueur. (S.)

37. Je pose $OA = x$, $OB = y$; la surface du triangle AOE sera

$$x^2 \frac{\sqrt{3}}{4},$$



celle du carré OBCD sera y^2; j'égale la somme à un maximum ou minimum m, que je vais déterminer. Nous aurons

(1) $$x + y = 1, \quad y = x - 1,$$

(2) $$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + y^2 = m.$$

Substituant à y sa valeur (2), on a

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x^2 - 2x + 1 = m,$$

$$x^2(4 + \sqrt{3}) - 8x - 4(m - 1) = 0,$$

$$x = \frac{8 \pm 4\sqrt{4 + (m-1)(4+\sqrt{3})}}{2(4+\sqrt{3})}.$$

On veut avoir pour x des valeurs réelles; il faut donc qu'on ait sous le radical une quantité positive

$$4+(m-1)(4+\sqrt{3})>0,$$

$$m>\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}.$$

On voit donc qu'il y a un minimum pour la valeur

$$m=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}};$$

on a alors

$$x=\frac{4}{4+\sqrt{3}};$$

$$x=0{,}6978348,$$
$$h=0{,}3021652,$$
$$m=0{,}3021694.$$

Il est clair qu'il n'y a pas de maximum, car la surface est la plus grande possible pour le carré construit sur AB, et il n'existe plus alors de pentagone.

38. En appelant x et y les deux rayons, nous aurons

$$2\pi xh+2\pi yh'=4\pi A^2,$$

ou bien

$$(1)\qquad hx+h'y=2A^2;$$

la somme de leurs volumes sera

$$\pi x^2h+\pi y^2h'.$$

Je l'égale à πm^2, m étant indéterminé ; il vient

$$(2)\qquad hx^2+h'y^2=m^2.$$

Je tire x de la relation (1), il vient

$$x=\frac{2A^2-h'y}{h},$$

d'où

$$x^2=\frac{4A^4-4A^2h'y+h'^2y^2}{h^2}.$$

Substituant dans (2), il vient

$$\frac{4A^4 - 4A^2h'y + h'^2y^2}{h} + h'y^2 = m^3,$$

ou enfin

$$y^2(h'^2 + hh') - 4A^2h'y + 4A^4 - hm^3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{2A^2h' \pm \sqrt{4A^4h'^2 - 4A^4h'^2 - 4A^4hh' + hh'^2m + h^2h'm^3}}{h'^2 + hh'}.$$

Le radical simplifié est

$$m^3(hh'^2 + h^2h') - 4A^4hh'.$$

Je pose

$$m(hh'^2 + h^2h') - 4A^4hh' > 0;$$

il vient

$$m^3 > \frac{4A^4hh'}{hh'^2 + h^2h'} \quad \text{ou} \quad m^3 > \frac{4A^4}{h + h'}.$$

La valeur minimum de la somme des deux volumes est ainsi

$$\frac{4\pi A^4}{h + h'}.$$

Ce minimum aura lieu pour

$$y = \frac{2A^2h'}{h'^2 + hh'} = \frac{2A^2}{h + h'}.$$

La valeur de x correspondante sera

$$x = \frac{2A^2 - \frac{2A^2h'}{h + h'}}{h} = \frac{2A^2}{h + h'}. \quad (S.)$$

On voit ainsi que les rayons des deux cylindres devront être égaux tous les deux à

$$\frac{2A^2}{h + h'}.$$

39. Soient x et y les côtés du rectangle inscrit, m^2 sa surface, a et h la base et la hauteur du triangle donné. On a

$$xy = m^2 \quad \text{et} \quad \frac{x}{a} = \frac{h - y}{h}.$$

On déduit de ces équations

$$x = \frac{a}{h}(h - y),$$

et par suite

$$\frac{a.y}{h}(h - y) = m^2,$$

ou

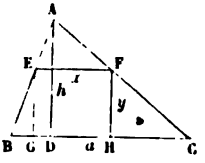
$$ahy - ay^2 - m^2h = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 - hy + \frac{m^2h}{a} = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$\frac{h^2}{4} - \frac{m^2h}{a} > 0,$$

d'où

$$m^2 < \frac{ah}{4}.$$



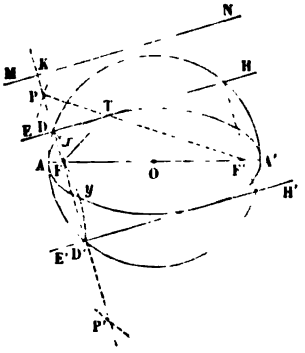
La surface m^2 étant assujettie à une condition d'infériorité, elle est susceptible d'un maximum qui est $\frac{ah}{4}$, c'est-à-dire la moitié de la surface du triangle donné. Dans ce cas,

$$y = \frac{h}{2}, \quad \text{(S.)} \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{2}. \quad \text{(S.)}$$

COURBES USUELLES.

---

40. Soit MN la droite donnée, EH, E'H' les deux tangentes qui lui sont parallèles. On sait qu'on obtient ces tangentes en décrivant du foyer F comme centre avec un rayon égal à $2a$ des arcs de cercle qui coupent aux points P et P' la perpendiculaire indéfinie PK abaissée du foyer F sur la ligne MN. On n'a plus qu'à prendre les milieux D et D' des distances FP, FP' et à mener par ces points des parallèles à MN. Cela posé, soit



$$DF = x, \quad FD' = y.$$

La distance des deux tangentes est minima en même temps que $x + y$. Or on sait que le lieu des projections des foyers sur les tangentes à l'ellipse est la circonférence de diamètre AA'. Donc x et y sont les deux segments de la corde DD' de cette circonférence, laquelle corde passe par le point fixe F. Le produit de ces deux segments est constant, car on a

$$FD \times FD' = AF \times FA'$$

ou, en désignant par $2a$ le grand axe, par $2b$ le petit axe, par $2c$ la distance focale,

$$xy = (a - c)\ (a + c) = a^2 - c^2 = b^2.$$

Quand deux facteurs ont un produit constant, leur somme est minimum lorsqu'ils deviennent égaux entre eux. Donc $x + y$ est minimum pour $x = y = b$, ce qui a lieu quand les tangentes parallèles sont situées aux extrémités du petit axe.

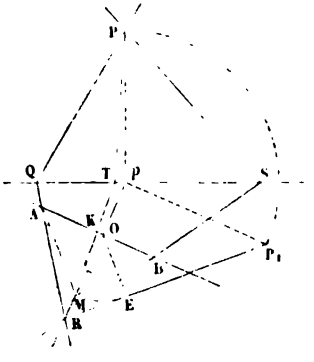
41. Résultat, 35 minutes et 91 minutes.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

---

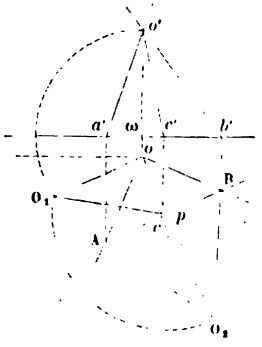
42. Voir Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie élémentaire.*

43. Soient PQR, PSR les deux plans donnés, Rp la projection horizontale de leur intersection, AB la trace d'un plan perpendiculaire à cette intersection, lequel coupe les deux plans donnés suivant l'angle rectiligne qui mesure le dièdre formé par ces deux plans. On rabat le plan vertical PpR autour de pR, et l'on a P_1R, rabattement de l'intersection. On abaisse OE perpendiculaire sur RP_1. La longueur OE est la hauteur du triangle AMB, lequel donne en M l'angle rabattu des deux plans. La bissectrice MK de cet angle donne un point K commun au plan bissecteur et au plan horizontal de projection. Ce point K appartient donc à la trace horizontale du plan bissecteur, trace qu'on obtient en joignant RT. La trace verticale est par suite TP.

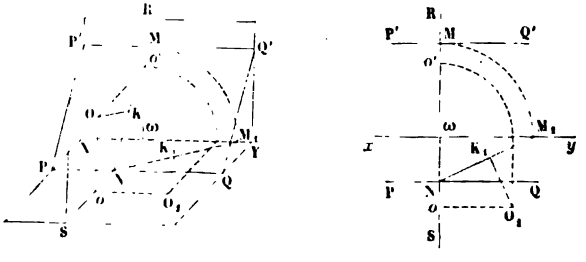


44. Soient $a'o'b'$, AOB les projections de l'angle donné et A, B les traces horizontales des droites qui se coupent dans l'espace au point O. Si l'on joint AB, on formera un triangle AOB ayant

son sommet au point O de l'espace et qu'on pourra rabattre autour de AB comme charnière. Il suffira pour cela de déterminer la hauteur de ce triangle OB; or cette hauteur est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés seraient O'ω et Op. On construit donc le triangle rectangle en OO_1p, on rabat O_1p sur O_2, et l'on a en AO_2B l'angle rabattu des deux droites. Si l'on mène la bissectrice O_2c de l'angle rabattu, cette droite coupe la base AB au point c, et, lorsqu'on relèvera le triangle AO_2B pour lui rendre sa position primitive, le point c ne bougera pas. Donc c est la trace horizontale de la bissectrice et se projette sur la ligne de terre en c'. D'ailleurs, la bissectrice passant par le point O, ses projections passent par O et O'. Si donc on joint c'O' et cO, on aura les projections demandées de la bissectrice.



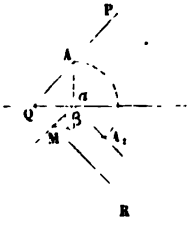
45. Soient o', O les projections du point donné O et P'Q', PQ les traces du plan parallèle à la ligne de terre. Par le point O me-



nons le plan R ω S perpendiculaire à la ligne de terre; il est aussi perpendiculaire au plan donné. Ce plan auxiliaire coupe le plan donné suivant MN. La perpendiculaire OK menée sur MN est

la distance demandée. Pour l'avoir en vraie grandeur, on rabattra le plan de profil sur le plan horizontal, autour de $S\omega$ comme charnière, et du point O_1 rabattu on abaissera O_1K_1 perpendiculaire sur la droite NM_1, rabattement de MN.

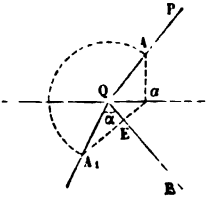
46. Soit QR la trace donnée, β l'angle du plan avec le plan horizontal de projection, et supposons le problème résolu, QP étant la trace verticale demandée.



Si d'un point A de cette trace on abaisse Aa perpendiculaire sur la ligne de terre et aM perpendiculaire sur QR, la droite qui va dans l'espace du point A au point M est aussi perpendiculaire à QR (théorème des trois perpendiculaires). Cette droite AM est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont Aa et aM; et l'angle A_1Ma de ce triangle rabattu étant précisément l'angle plan du dièdre formé par le plan donné et par le plan horizontal, cet angle doit être égal à β. D'où la construction suivante :

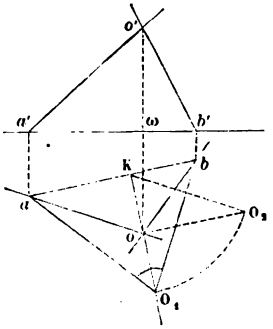
D'un point M pris sur QR, on mène Ma perpendiculaire à QR. En a on fait un angle droit, en M un angle égal à β. On achève ainsi le triangle rectangle M$a$$A_1$ et l'on relève aA_1 en aA. La droite QA est la trace verticale demandée.

47. Supposons le problème résolu et soit PQ la trace verticale demandée. Si l'on fait tourner le plan autour de sa trace QR comme charnière, on sait qu'un point A quelconque de la trace PQ se rabattra en A_1 (à l'intersection de la circonférence de rayon QA et de la perpendiculaire aE abaissée du point a, projection horizontale de A sur la charnière QR). Donc l'angle $RQA_1 = \alpha$ est l'angle rabattu des deux traces. Par suite, QR étant donnés, ainsi que l'angle α, on fera l'angle $RQA_1 = \alpha$, et on relèvera le point A_1 dans



la position A pour la construction inverse. PAQ est la trace verticale demandée.

48. Soient (Oa, $O'a'$), (Ob, $O'b'$) les deux droites données ; ab la trace horizontale de leur plan.



K est le pied de la hauteur du triangle Oab de l'espace ;

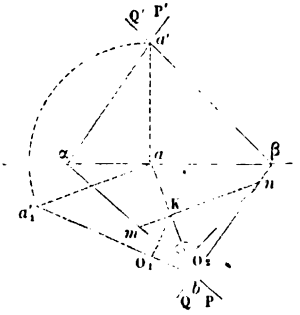
KOO_2 le rabattement sur le plan horizontal du plan vertical qui contient cette hauteur ;

KO_2 la vraie grandeur de cette hauteur ;

abO, le rabattement sur le plan horizontal du plan des deux droites données ($KO_1 = KO_2$).

O_1 est l'angle cherché. (*Voir le n° 44.*)

49. Soient $P\alpha P'$ et $Q\beta Q'$ les deux plans donnés ; ab la projection horizontale de leur intersection.



mn est la trace horizontale du plan de l'angle cherché ;

a'_1b le rabattement de l'intersection des deux plans sur le plan horizontal ;

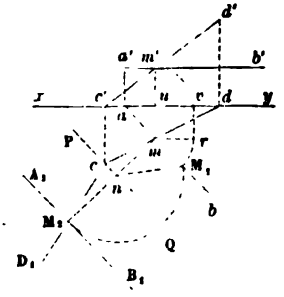
KO_1 le rabattement de la perpendiculaire abaissée du point K sur l'intersection ;

KO_2 le rabattement de cette même droite dans le plan de l'angle cherché, la charnière étant la trace mn.

mO_2n est l'angle des deux plans. (*Voir le n° 43.*)

50. Les deux droites données sont la droite quelconque cd, $c'd'$

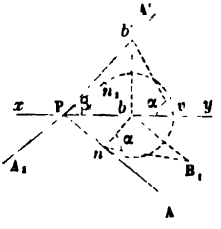
et la parallèle au plan horizontal ab, $a'b'$. Elles se coupent au point m, m'. La trace horizontale du plan des deux droites est PQ parallèle à ab. Faisons tourner le point m, m' autour de PQ, il décrira un arc de cercle ayant n pour centre, nM_1 pour rayon et viendra se rabattre en M_2. On aura A_1B_1 parallèle à PQ pour le rabattement de la droite ab, $a'b$, et cD_1 pour le rabattement de la droite cd, $c'd'$. L'angle demandé sera un des angles en M_2 formés par les deux droites rabattues.



51. Supposons le problème résolu et soit AP la trace cherchée. L'angle que fait le plan APA' avec le plan horizontal est

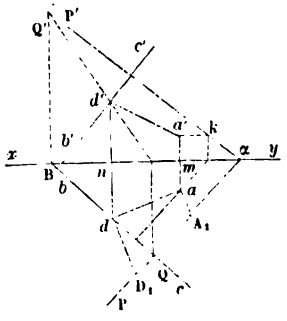
$$bnB_1 = \alpha,$$

et PA perpendiculaire à l'extrémité n de bn sera tangente à la circonférence décrite du centre b avec le rayon bn. De là cette construction : d'un point quelconque b' pris sur PA', abaissons la perpendiculaire $b'b$ à la ligne de terre; faisons l'angle $bb'v = 90° - \alpha$; décrivons une circonférence de b comme centre avec le rayon $bv = bn$, et enfin de P menons la tangente PA à cette circonférence. Ce sera la trace demandée.



Discussion. — Si le point P est à l'extérieur de la circonférence, il existe une seconde tangente, donc un second plan A_1PA' satisfaisant à la question. Si le point P est sur la circonférence, il n'y a qu'une solution, et le plan est perpendiculaire au plan vertical. Il n'y a plus de solution si le point P est à l'intérieur de la circonférence. Appelant b l'angle $A'Py$, on trouve sans peine, pour la condition de possibilité, $\alpha > \beta$. (S.)

52. Soient (a, a') les projections du point donné, $(bc, b'c')$ les projections de la droite donnée.



Par le point donné menons le plan P'αP, perpendiculaire à la droite $(bc, b'c')$; puis déterminons les projections du point d'intersection de ce plan avec la droite $(bc, b'c')$. Pour effectuer cette détermination, nous nous servons du plan (Q'βQ) qui projette horizontalement la droite $(bc, b'c')$.

Le point dd'', intersection de la droite donnée et de la droite intersection des deux (P'αP) et (Q'βQ), est le point cherché.

La plus courte distance demandée est $(ad'a'd')$.

Pour obtenir en vraie grandeur la droite (AD) de l'espace, nous rabattons autour de (ad) le trapèze (Aa, Dd).

A_1D_1 est la grandeur de la distance cherchée.

53 (*). Soient BP la ligne de terre ; PA, PA' les traces du plan donné, et α, β les angles que font respectivement ces traces avec BP. Coupons par un plan de profil ABA', abaissons BD perpendiculaire sur AA' et joignons DP. Il est facile de voir que DP est la projection de la ligne de terre sur le plan donné, et que, par suite, DPB $= x$ est l'angle dont on demande la tangente. Or

$$BD = BP \tang x,$$

d'où

$$(1) \qquad \tang x = \frac{BD}{BP}.$$

D'autre part, le double de la surface du triangle rectangle ABA' peut s'exprimer de deux manières, et l'on a

$$(2) \qquad AB \times BA' = AA' \times BD;$$

mais

$$AB = BP \tang \alpha, \qquad BA' = BP \tang \beta,$$

(*) Le lecteur est prié de construire la figure.

et, dans le triangle rectangle ABA',

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BA'}^2 = \overline{BP}^2 \tang^2\alpha + \overline{BP}^2 \tang^2\beta$$
$$= \overline{BP}^2 (\tang^2\alpha + \tang^2\beta) ;$$

substituant dans (2), il vient

$$\overline{BP}^2 \tang\alpha . \tang\beta = BP . BD \sqrt{\tang^2\alpha + \tang^2\beta},$$

d'où

$$\frac{BD}{BP} = \frac{\tang\alpha \tang\beta}{\sqrt{\tang^2\alpha + \tang^2\beta}},$$

et, en vertu de (1),

$$\tang x = \frac{\tang\alpha \tang\beta}{\sqrt{\tang^2\alpha + \tang^2\beta}}.$$

54 (*). On donne le plan CPC' et la droite *ab*, *a'b'*.

D'un point quelconque *m*, *m'* de la droite donnée, on abaisse la perpendiculaire *md*, *m'd'* sur le plan donné. L'angle demandé est le complément de l'angle que fait cette perpendiculaire *md*, *m'd'* avec la droite donnée. On détermine la trace horizontale *d* de la perpendiculaire et on la joint à la trace horizontale *b* de la droite *ab*, *a'b'*. Du point *m* on abaisse la perpendiculaire *mn* sur *bd*, puis on élève à *mn* une perpendiculaire mM_1 que l'on prend égale à *nm'*. De *n* comme centre avec le rayon nM_1, on décrit un arc de cercle. Le point M_2 où cet arc rencontre la droite *mn* prolongée est le rabattement du point M de l'espace. L'angle dM_2b est, en rabattement, l'angle de la droite *ab*, *a'b'* et le .....sa perpendiculaire *md*, *m'd'*. Au point M_2, on élève sur M_2b une perpendiculaire M_2f.

L'angle fM_2d, complémentaire de l'angle dM_2b, est égal à l'angle demandé.

(*) Le lecteur est prié de construire la figure.

COSMOGRAPHIE.

---

55. Si l'on désigne par x le demi-grand axe inconnu, on a, en vertu de la loi de Képler : les carrés des durées des révolutions des planètes autour du Soleil sont proportionnels aux cubes de leurs moyennes distances au Soleil,

$$\frac{x^3}{1} = \frac{\overline{1143,796}^2}{\overline{365,250}^2},$$

d'où

$$x = \sqrt{\left(\frac{1143,796}{365,256}\right)^2},$$

$$\log x = \frac{1}{3}(\log 1143,796 - \log 365,256)$$

$$\log 1143,796 = 3,0583486$$

$$-\log 365,256 = \overline{3},4374027$$

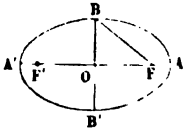
$$\log 1143,796 - \log 365,256 = 0,4957513$$

$$\log x = 0,3305018,$$

$$x = 2,14043. \quad (S.)$$

56. Résultat : 0,398087. (S.)

57. La distance BF d'un sommet du petit axe d'une ellipse à l'un F des foyers de cette ellipse est précisément égale au demi-grand axe OA. On a donc



$$OF = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}$$

$$= \sqrt{(OA + OB)(OA - BO)},$$

$$OA + OB = 12733,$$

Par suite

$$OA - OB = 21,$$

$$FF' = 2.OF = 2\sqrt{12733} \times 21$$

$$= 1034 \text{ kilomètres.} \quad (S.)$$

NOTA. Les problèmes suivants ont été résolus dans le Recueil de problèmes de Géométrie.

58. Résultat, 268 lieues.

59. Résultat, 1 degré.

60. Résultat, 263300 mètres.

61. Résultat, 180063300 kilomètres carrés.

62. Résultat, 211204 myriamètres carrés.

63. Résultat, 686j 23h 29m.

64. Les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes (troisième loi de Képler).

Désignons par x la durée de la révolution de Jupiter, celle de la Terre étant une année. On a

$$\frac{x^2}{1^2} = \frac{\overline{5,2}^3}{1^3},$$

ou

$$x^2 = \overline{5,2}^3 = 140,608,$$

d'où

$$x = \sqrt{140,608} = 11^{ans},85.$$

MÉCANIQUE.

---

65. Appelons l et l' les longueurs des deux bras de la balance, P le poids inconnu du corps; on a les deux équations d'équilibre

$$P \times l = l' \times 1000,$$

$$1200 \times l = l' \times P,$$

d'où

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

En multipliant en croix les deux équations, et simplifiant, on a

$$P^2 = 1000 \times 1200,$$

$$P = \sqrt{1000 \times 1200} = 1095^{gr},445. \quad (S.)$$

66. Soient P le poids additionnel, γ l'accélération qu'il imprime au système, g l'accélération due à la pesanteur.

L'accélération γ est égale à la force p qui imprime le mouvement, divisée par la masse du système, qui est

$$\frac{100^{gr} + p}{g}.$$

Ainsi

$$\gamma = \frac{pg}{100 + p}.$$

Or γ se déduit de l'équation du mouvement, qui est

$$x = \tfrac{1}{2}\gamma t^2,$$

ce qui donne, pour l'espace parcouru après la troisième seconde,

$$1,08 = \frac{9}{2} \times \gamma,$$

d'où

$$\gamma = 0,24.$$

La première équation devient

$$0,24 = \frac{pg}{100 + p},$$

d'où l'on déduit p,

$$p = \frac{24}{g - 0,24}$$

et, faisant $\gamma = 9,8088$,

$$p = 2^{kg},508. \quad (S.)$$

67. En prenant le point A pour origine des espaces, les équations des deux mouvements sont

$$x = t^2,$$
$$x = 75 + \tfrac{5}{2} t + \tfrac{1}{2} t^2.$$

Les deux mobiles se rencontreront au temps t, donné par l'égalité

$$t^2 = 75 + \tfrac{5}{2} t + \tfrac{1}{2} t^2.$$

Rejetant la solution négative,

$$t = 15^m. \quad (S.)$$

68. Soient h la hauteur du puits, v la vitesse du son, t le temps de la chute du corps, nous aurons

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

On n'entend le bruit provenant de la chute du corps dans l'eau qu'après un temps $\frac{h}{v}$; on aura donc

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} = 0^m,58,$$

d'où l'on tire

$$x = 1^m,621. \quad (S.)$$

69. La rencontre ne peut avoir lieu que lorsque le premier mobile redescend, après avoir passé par une vitesse nulle. Ce mobile, en redescendant, reprend d'ailleurs à chaque point de sa trajectoire la même vitesse qu'il y avait en montant, et le temps qu'il met à parcourir sa trajectoire est le même en montant et en redescendant.

Le deuxième mobile se meut pendant $8^s,7$; il a, au bout de ce temps, une vitesse donnée par la formule

$$v_{8,27} = v_0 - gt = 100 - 9,8088 \times 8,27,$$
$$v_{8,27} = 14^m,66344.$$

Au moment de la rencontre, le premier mobile rencontre cette vitesse; mais, en sens inverse, le temps que le premier mobile a mis depuis le moment où sa vitesse est nulle jusqu'à la rencontre est donné par la formule

$$V = gt;$$

en y faisant $V = v_{8,27} = 14,66344$, on obtient

$$t = \frac{14,66344}{9,8088}.$$

D'après ce que nous avons remarqué plus haut, il a mis le même temps pour monter que pour descendre; l'intervalle T entre les départs des deux mobiles doit donc avoir été double de ce temps t.

$$T = \frac{2 \times 14,66344}{9,8088} = 2^s,98985. \quad (S.)$$

70. Prenons pour origine des temps le moment où le deuxième mobile se met en mouvement; le premier a alors une vitesse égale à g

$$v_0 = g = 9,8088 \; (v = gt);$$

l'espace qu'il a parcouru est

$$e_0 = \tfrac{1}{2} g = 4,9044 \; (e = \tfrac{1}{2} gt^2).$$

Au bout du temps x, le premier a donc parcouru, d'après la formule du mouvement uniformément varié,

$$e = e_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2,$$

un espace

$$E = 4,9044 + 9,8088\, x + \tfrac{1}{2} 9,8088\, x^2:$$

le deuxième aura parcouru

$$E' = \tfrac{1}{2} \times 9{,}8088\,x^2.$$

On donne la différence

$$E - E' = 98^m;$$

on aura donc, pour déterminer x, l'équation

$$4{,}9044 + 9{,}8088\,x + \tfrac{1}{2} \times 9{,}8088\,x^2 - \tfrac{1}{2} \times 9{,}8088\,x^2 = 98,$$

$$4{,}9044 + 9{,}8088\,x = 98,$$

$$9{,}8088 \times x = 93{,}0956,$$

$$x = 10^s{,}49. \quad (S.)$$

La distance de 98 mètres aura donc lieu $10^s{,}49$ après le départ du second mobile (S.).

71. Soit x la distance de Calais à Douvres. Puisqu'il fait x en deux heures, sa vitesse pour un temps favorable est $\frac{x}{2}$. Sa vitesse pendant une première moitié du trajet a donc été $\frac{x}{2} - 6$, et pendant la seconde $\frac{x}{2} - 4$.

D'après la formule $e = vt$ du mouvement uniforme, le temps employé à parcourir la première moitié du trajet est

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - 6},$$

D'ailleurs le temps employé à parcourir la deuxième moitié est

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - 4},$$

et l'on a, d'après l'énoncé,

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - 6} + \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - 4} = \frac{5}{7} \times \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} - 6},$$

d'où

$$x = 15 \text{ milles.} \quad (S.)$$

La vitesse en temps favorable est donc 7,5 milles, la vitesse dans la première moitié du trajet 1,5 mille, et dans la seconde moitié 3,5 milles.

72. Soient v_0 la vitesse initiale du corps pesant, t le temps de chute, e l'espace parcouru. Les lois de la chute des corps nous donnent entre ces grandeurs la relation

$$e = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2,$$

d'où l'on déduit une équation du second degré en t

$$g t^2 + 2 v_0 t - 2e = 0.$$

L'une des racines est positive et l'autre négative, puisque leur produit $-2e$ est négatif; la première racine est donc la seule admissible : c'est

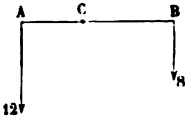
$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2eg}}{g},$$

ou, dans le cas qui nous occupe,

$$t = \frac{-3 + \sqrt{9 + 2.30.9,8088}}{9,8088} = 2,18. \quad (S.)$$

Le temps de chute est donc $2^s,18$.

73. Soient A et B les centres de gravité donnés. Au point A est appliquée une force verticale due à la pesanteur et égale à 12 kilogrammes, au point B une force parallèle à la première et égale à 8 kilogrammes. Le centre de gravité cherché est au point d'application de la résultante de ces deux forces ; or il se trouve sur la droite AB et en un point C tel que



$$\frac{AC}{BC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

d'où

$$\frac{AC}{AC + BC} = \frac{2}{2+3}, \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{2}{5}.$$

Or AB est connu et égal à $0^m,35$: donc

$$\frac{AC}{0,35} = \frac{2}{5};$$

d'où

$$AC = 0^m,14, \quad (S.)$$

et par conséquent

$$BC = 0^m,21. \quad (S.)$$

74. Le temps 5 secondes se compose de deux parties : 1° le temps que met le projectile pour arriver à l'obstacle ; 2° le temps que met le son pour venir de l'obstacle à l'observateur. En supposant le mouvement du projectile horizontal, rectiligne et uniforme, et désignant par x la distance cherchée, on a, pour le temps employé par le projectile pour parcourir l'espace x, $\frac{x}{200}$, et comme à zéro la vitesse du son est 333 mètres, le temps employé par le son pour franchir le même espace x sera $\frac{x}{333}$, d'où résulte l'équation

$$\frac{x}{200} + \frac{x}{333} = 5.$$

Résolvant,

$$x = 624^m,765. \quad (S.)$$

Si la température était 40 degrés C., le calcul prouve que la vitesse du son à $t°$ est égale à la vitesse à zéro multipliée par $\sqrt{1+\alpha t}$, α étant le coefficient de dilatation de l'air. En cherchant alors la différence,

$$\frac{624^m,765}{333} - \frac{624^m,765}{333\sqrt{1+\alpha 40}} = 0^s,123. \quad (S.)$$

Entre le temps que met le son dans le premier et le deuxième cas, on aura le temps dont il faut diminuer 5 secondes pour répondre à la seconde partie de la question.

75. La nouvelle accélération g' sera donc liée à $g = 9,8088$ par la relation

$$g' = \frac{x}{200+x} g.$$

D'ailleurs la loi qui lie l'espace au temps est

$$e = \frac{1}{2} g' t^2.$$

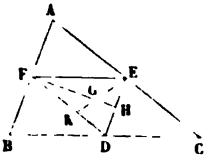
On a donc

$$e = \frac{g}{2} \frac{x}{200 + x} t^2.$$

Ici, $e = 0,4$, $g = 9,8088$, $t = 2$; on trouve alors

$$x = \frac{100}{24,022} = 4^{gr},163. \quad (S.)$$

76. Les trois côtés d'un triangle étant considérés comme des lignes pesantes, le centre de gravité de chacune de ces lignes est en son point milieu, et les poids de ces différentes lignes sont proportionnels à leurs longueurs.



Le centre de gravité cherché est donc le point d'application de la résultante de trois forces parallèles appliquées en D, E, F, et proportionnelles respectivement aux longueurs BC, AC et AB. Joignons DE.

Le point d'application de la résultante des deux forces appliquées en D et en E est sur DE, en un point H qui partage DH en deux parties telles que l'on ait $\frac{DH}{HE} = \frac{AC}{BC}$.

Or, comme $FD = \frac{AC}{2}$ et $EF = \frac{BC}{2}$, on en déduit $\frac{DH}{HE} = \frac{FD}{EF}$.

Ce qui signifie que la ligne FH est bissectrice de l'angle EFD.

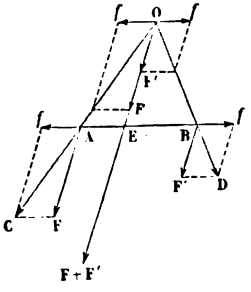
Au point H sera appliquée une force proportionnelle à la somme $BC + AC$ des deux côtés considérés. Le centre de gravité cherché G sera donc sur la ligne FH en un point tel que l'on ait $\frac{HG}{GF} = \frac{AB}{AC + BC}$.

Ce centre de gravité est d'ailleurs aussi sur la bissectrice EK de l'angle FED; enfin, comme il doit être aussi sur la troisième bissectrice du triangle FED, on pourrait déduire de là que les

trois bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point.

Le centre de gravité du périmètre d'un triangle est à la rencontre des trois bissectrices des angles du triangle formé en joignant les milieux des côtés du triangle proposé.

77. Aux deux extrémités de la droite AB, supposée rigide, appliquons deux forces quelconques f, égales et directement opposées. Ces deux forces se font équilibre et ne troublent en rien l'état du système.



Composons en A et en B chaque force f avec les forces F et F'; nous obtiendrons deux résultantes, BD et AC, dont les prolongements se rencontrent en O; le point O étant supposé invariablement lié aux points A et B, on peut transporter BD et AC en O, et les décomposer en ce point parallèlement aux forces F et F' et à la direction AB. Il en résulte deux forces f égales et de sens contraire appliquées en O, et qui, par conséquent, se détruisent, de sorte qu'il ne reste que deux forces égales à F et à F' appliquées en O suivant la même droite; ces deux forces se composent en une seule, F + F', dont on peut transporter le point d'application en E sur AB.

Cela posé, on a, dans les triangles semblables OEB et BF'D d'une part, DAE et ACF de l'autre,

$$\frac{EB}{OE} = \frac{F'D \text{ ou } f}{BF' \text{ ou } F'},$$

et

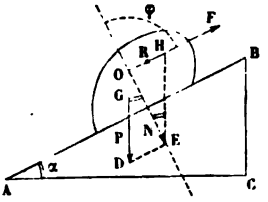
$$\frac{OE}{EA} = \frac{AF \text{ ou } F}{FC \text{ ou } f}.$$

Multipliant membre à membre ces deux proportions, il vient

$$\frac{EB}{EA} = \frac{F}{F'}.$$

La résultante de deux forces parallèles et de même sens est donc égale à leur somme, et appliquée en un point E divisant la droite AB, qui joint leurs points d'application, dans le rapport inverse des intensités des deux forces données.

78. Soit α l'angle du plan avec l'horizon, F la force appliquée en un point R du corps, suivant RH, et φ l'angle de cette force avec la normale au plan. — La force F et le poids P du corps que nous supposons concentré en G, centre de gravité du corps, ont leurs directions qui doivent se rencontrer en O, car on sait qu'il ne peut y avoir équilibre que si les forces appliquées à un corps, et réduites à deux, sont dans un même plan. De plus, F et P peuvent être supposées transportées en O sur leur direction. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante de F et P soit détruite, c'est-à-dire soit normale au plan. Si donc on construit le parallélogramme ayant OD pour côté et la direction OE pour diagonale, OH représente l'intensité que doit avoir F pour qu'il y ait équilibre; mais on a



$$(1) \qquad \frac{OH}{HE} = \frac{F}{P} = \frac{\sin OEH}{\sin HOE} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180-\varphi)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

Si l'on appelle N l'intensité de la normale OE, et si l'on remarque que l'angle φ égale la somme des angles non adjacents

$$OHE + OEH = OHE + \alpha,$$

on aura

$$\varphi = OHE + \alpha, \quad \text{d'où} \quad OHE = \varphi - \alpha.$$

Mais on a

$$(2) \qquad \frac{OE}{EH} = \frac{N}{P} = \frac{\sin OHE}{\sin(180-\varphi)} = \frac{(\sin\varphi - \alpha)}{\sin\varphi}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent comme condition d'équilibre

$$F = P\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}, \quad N = P\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi}.$$

D'où l'on voit :

1° Que φ doit être plus grand que α.

2° Que F a son minimum quand le facteur variable $\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$ est aussi minimum, ce qui a lieu pour $\sin\varphi$ maximum, ou pour $\varphi = 90$. Dans ce cas, la force devient parallèle au plan. Dès lors on a pour F

$$F = P\sin\alpha \quad \text{et} \quad N = P\cos\alpha,$$

c'est-à-dire que F augmente avec l'angle α; d'ailleurs on a aussi

$$BC = AB\sin\alpha.$$

Donc

$$\alpha = \frac{F}{P} = \frac{BC}{AB},$$

c'est-à-dire que si la force, prenant une direction parallèle au plan, devient minimum, la force F est au poids du corps comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

79. Soit V_0 la vitesse initiale $= 35$, et t le temps que le corps met à monter. Quand il est arrivé au haut de sa course, sa vitesse est devenue nulle. Mais cette vitesse a pour expression $V_0 - gt$.

On a donc

$$V_0 - gt = 0,$$

d'où

$$\frac{V_0}{g} = t.$$

Ainsi

$$t = \frac{35}{9,8088} = 3^s,56.$$

Pour redescendre, le corps met le même temps t' que pour monter. En effet, il tombe alors en chute libre. La formule $V = gt$ devient applicable, et comme sa vitesse V devient alors égale à 35 mètres, vitesse au départ, on a

$$t' = \frac{V_0}{g}.$$

La durée totale du mouvement est donc $7^s,12$.

80. Lorsqu'un corps cesse de monter pour commencer à des-

cendre, sa vitesse est nulle. Remplaçant V par 0 dans la formule $V = V_0 - gt$, on a

$$0 = V_0 - gt,$$

d'où

$$t = \frac{V_0}{g},$$

et, pour le temps total de la montée et de la descente,

$$T = \frac{2V_0}{}\,;$$

dans le cas actuel,

$$T = \frac{200}{9,8088} = 20^s,389. \quad (S.)$$

81. On sait que l'accélération due à la pesanteur égale $9^m,8088$. Soit g' l'accélération du mouvement dans la machine d'Atwood. En vertu des formules

$$e = \frac{g't^2}{2}, \quad \frac{g'}{g} = \frac{p}{2P + p},$$

nous avons

$$0^m,1 = \frac{g'}{2},$$

d'où

$$g' = 0^m,2 \quad \text{et} \quad \frac{0^m,2}{9^m,8088} = \frac{p}{480 + p}.$$

On tire de cette dernière équation

$$\frac{x}{480} = \frac{0,2}{9,8088 - 0,2} = \frac{0,2}{9,6088},$$

d'où enfin

$$x = \frac{480 \times 0,2}{9,6088} = \frac{96}{9,6088} = 9^{gr},991 \text{ par excès.}$$

TABLE DES MATIÈRES

SOLUTIONS.

MAXIMA ET MINIMA.

Pages.

Arithmétique et Algèbre..... 1
Géométrie..... 6

COURBES USUELLES.

Problèmes..... 27

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Problèmes..... 29

COSMOGRAPHIE.

Problèmes..... 37

MÉCANIQUE.

Problèmes..... 39

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — 4479-76.

RECUEIL

DE PROBLÈMES

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. - 4479-76.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

TIRÉS DES COMPOSITIONS

DONNÉES A LA SORBONNE DE 1853 A 1875

POUR LES

BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES

SUIVIS

DES COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, DE PHYSIQUE,
DE CHIMIE ET DE SCIENCES NATURELLES DONNÉES AUX CONCOURS GÉNÉRAUX
DE 1846 A 1875,
ET DE TYPES D'EXAMENS DU BACCALAURÉAT ÈS LETTRES
ET DES BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES,

PAR

A. LONCHAMPT

Préparateur aux baccalauréats ès lettres et ès sciences
et aux Écoles du Gouvernement.

DEUXIÈME ÉDITION

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

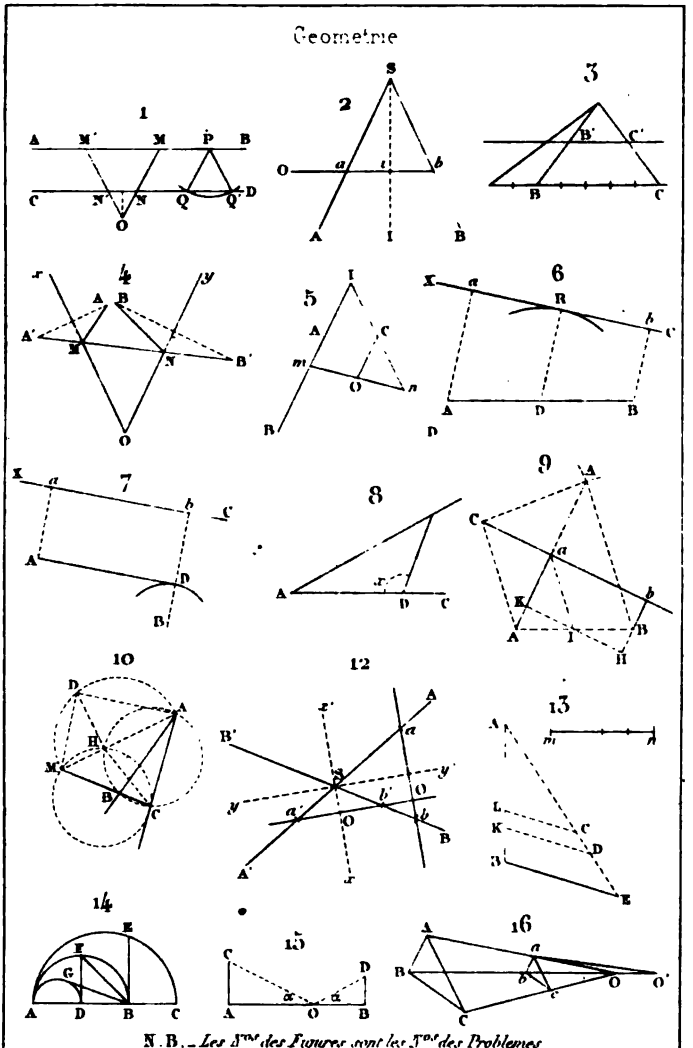
ATLAS

PARIS

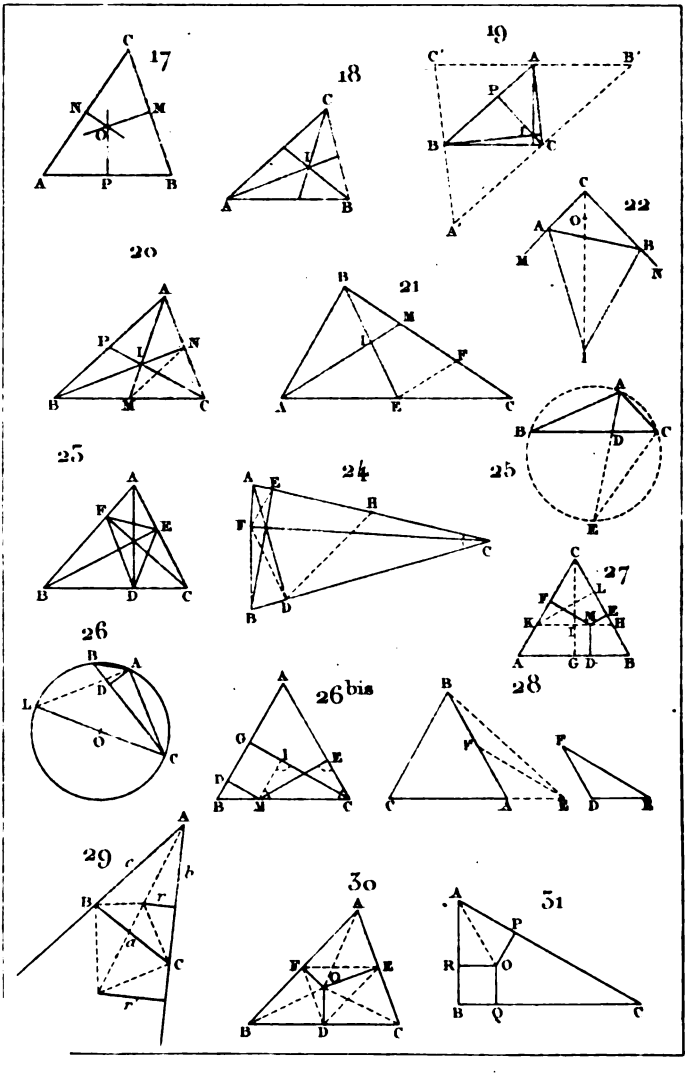
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

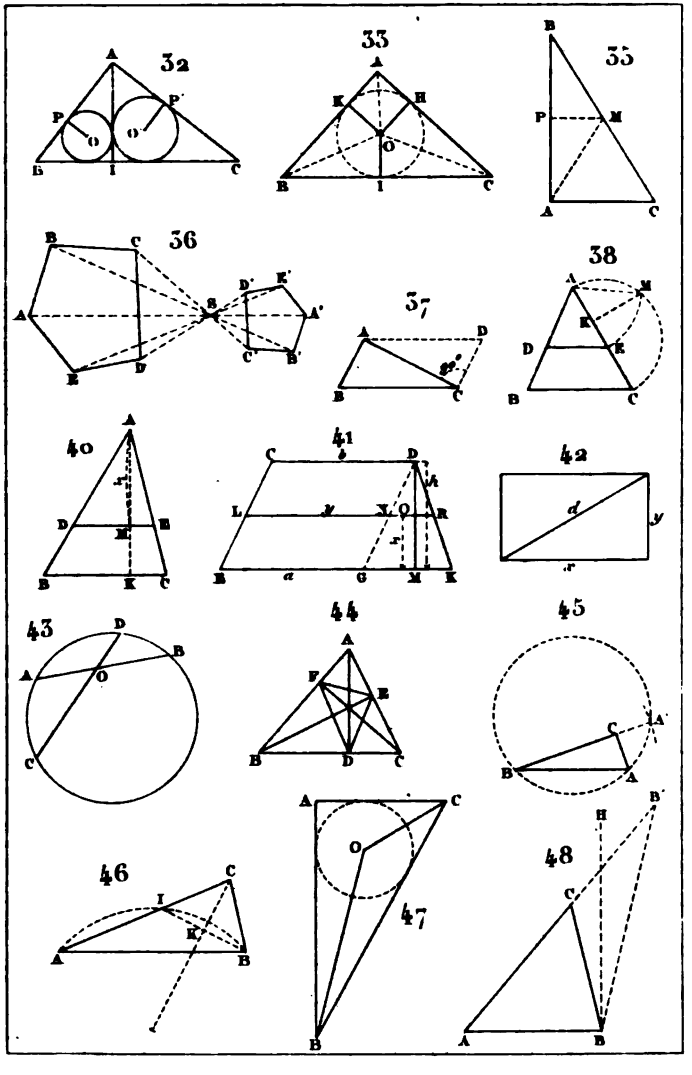
1876

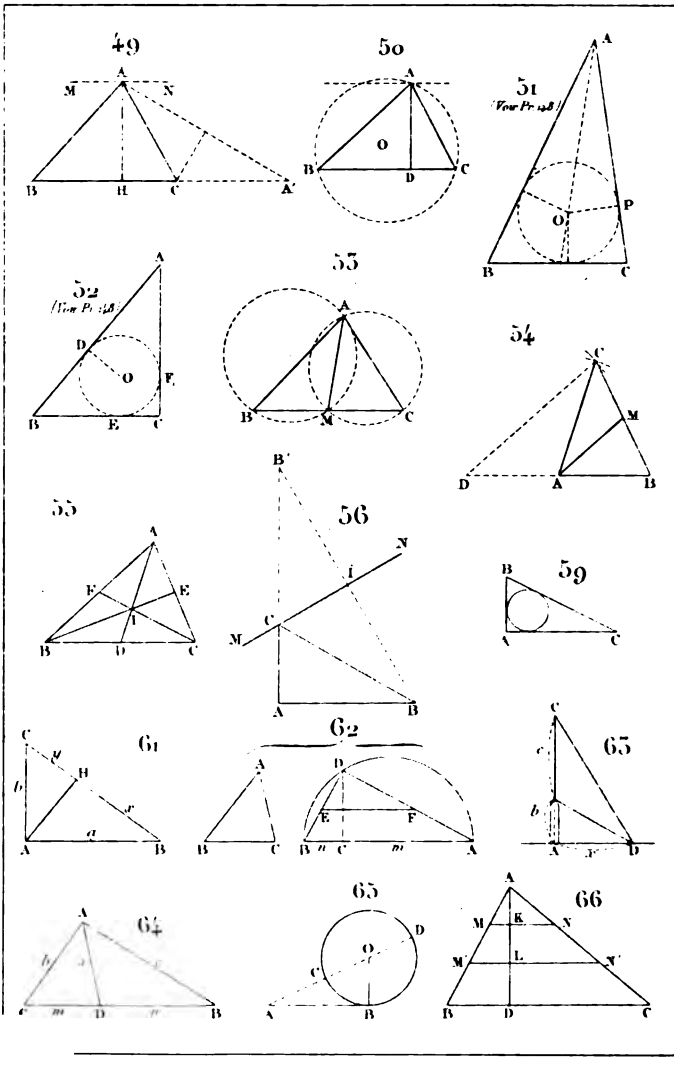
(Tous droits réservés.)

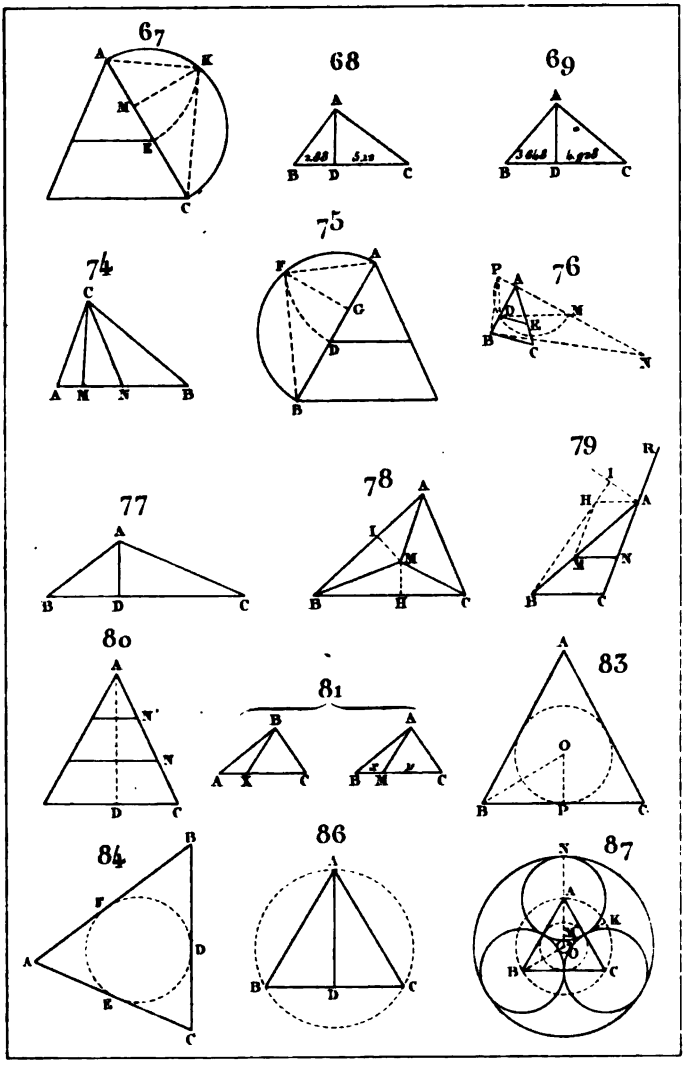


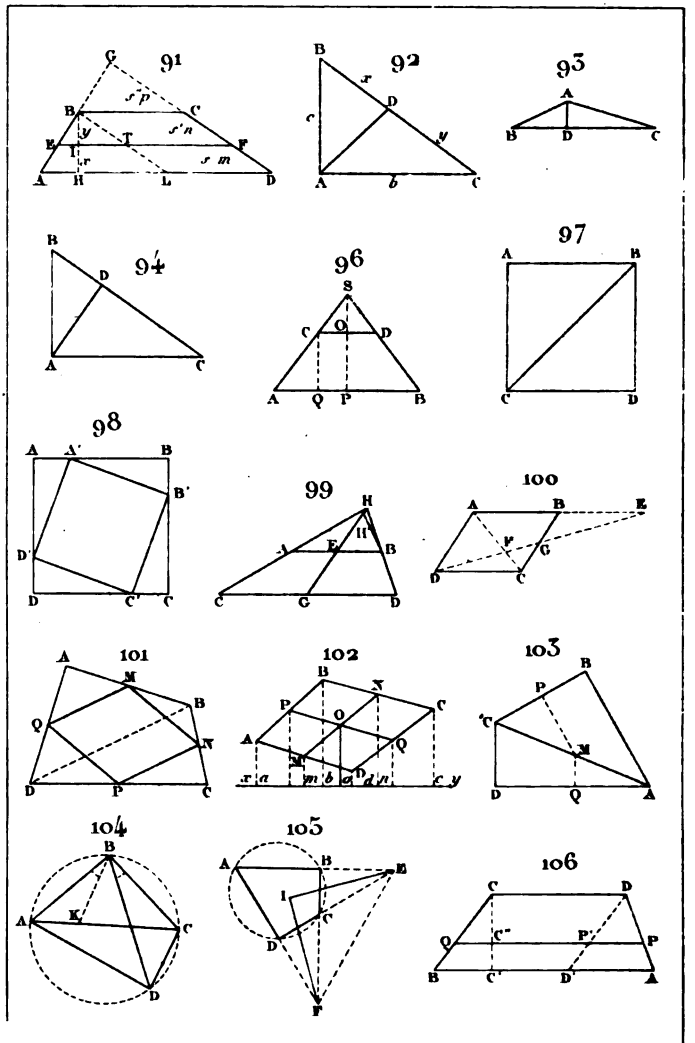
Imp Comp. Gros
Gauthier-Villars, Editeur.
C. Lagrou sc

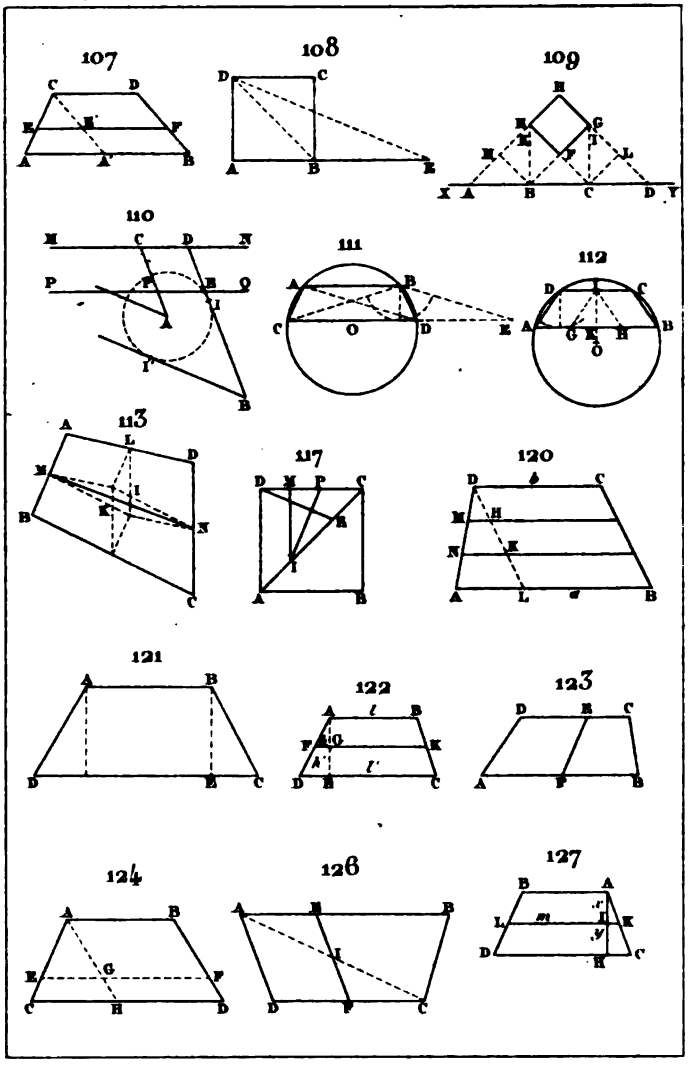

17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
26bis
27
28
29
30
31


32
33
35
36
37
38
40
41
42
43
44
45
46
47
48

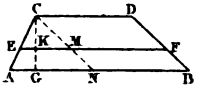

49
50
51
(Voir Pr. 48)
52
(Voir Pr. 48)
53
54
55
56
59
61
62
63
64
65
66


67
A
K
M
E
C
68
A
B
D
C
69
A
B
D
C
74
C
A
M
N
B
75
F
A
G
D
B
76
P
A
D
M
E
B
C
N
77
A
B
D
C
78
A
I
M
B
H
C
79
R
I
H
A
M
N
B
C
80
A
N'
N
D
C
81
B
A
X
C
A
B
M
C
83
A
O
B
P
C
84
B
F
A
D
E
C
86
A
B
D
C
87
N
A
K
M
B
C

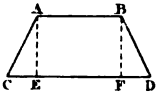

91
92
93
94
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106


107
108
109
110
111
112
113
117
120
121
122
123
124
126
127

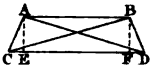
128



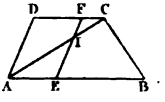
129



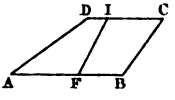
130



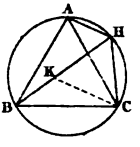
131



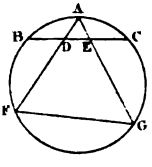
132



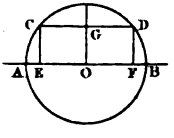
133



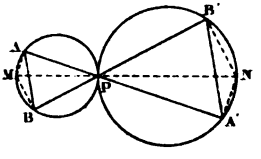
134



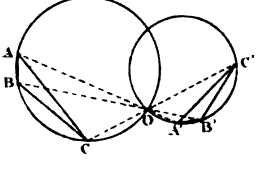
135



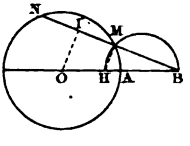
136



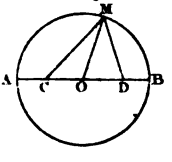
137



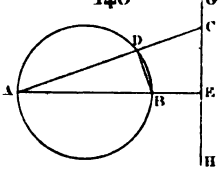
138



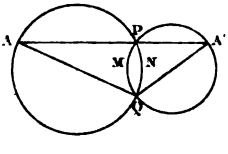
139



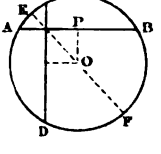
140



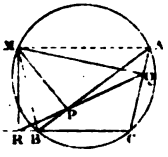
141



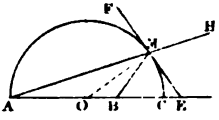
142



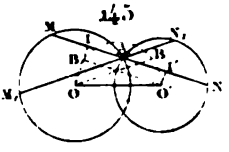
143



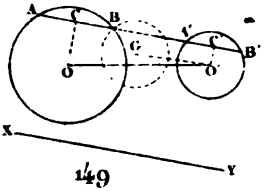
144



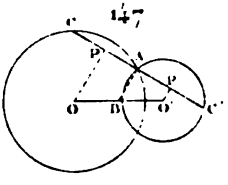
145



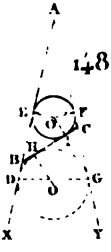
146



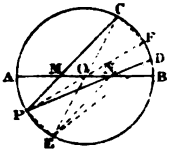
147



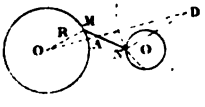
148



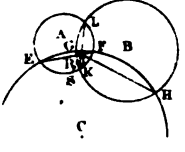
149



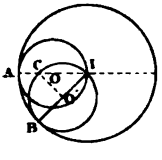
150



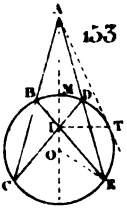
151



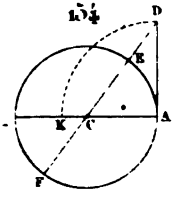
152



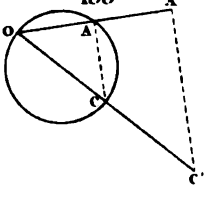
153



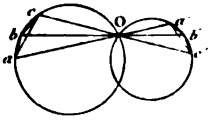
154



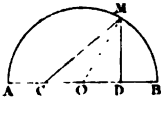
155

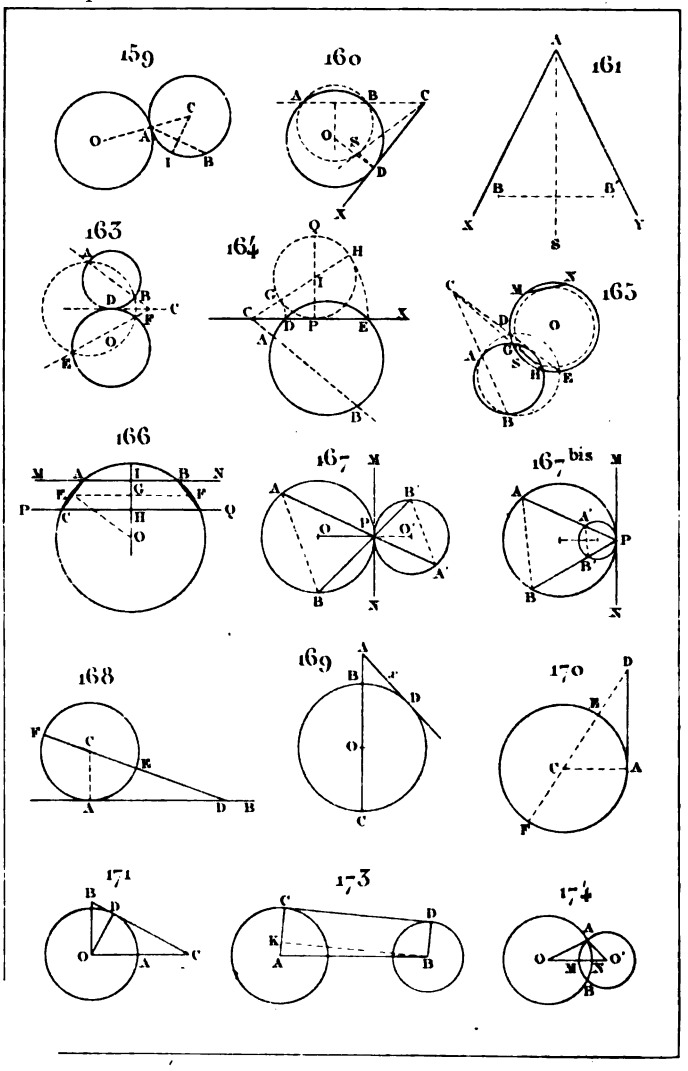


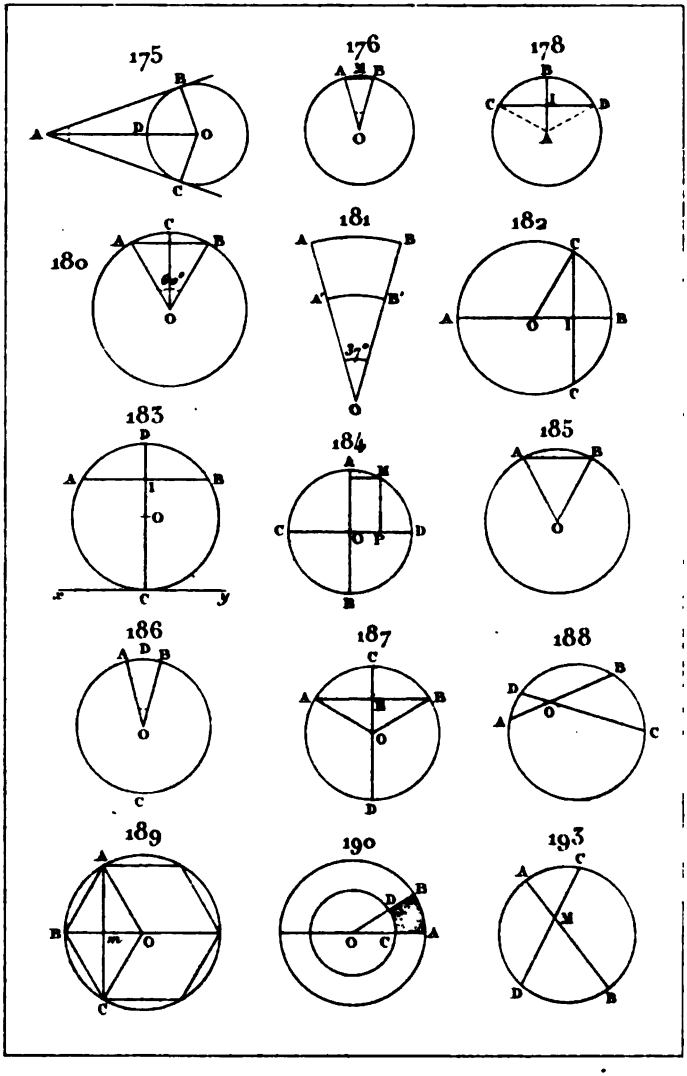
156



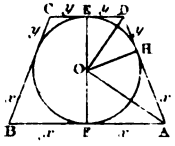
157



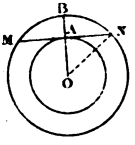

159
160
161
163
164
165
166
167
167 bis
168
169
170
171
173
174


175
176
178
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
193

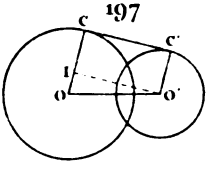
194



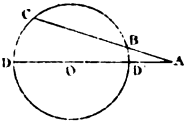
195



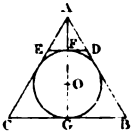
197



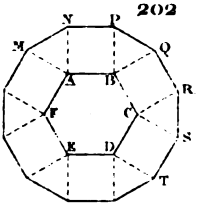
198



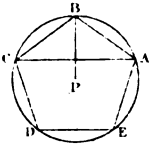
199



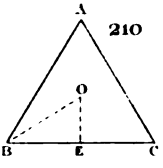
202



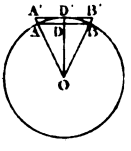
204



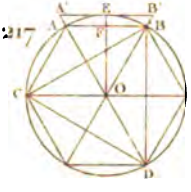
210



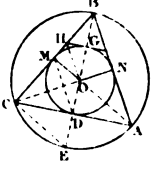
213



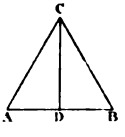
217



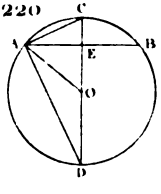
218



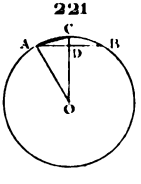
219



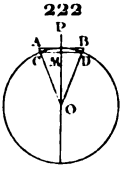
220



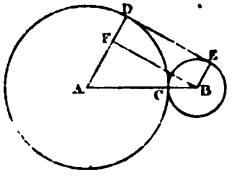
221



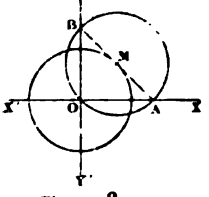
222



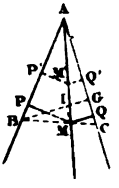
223



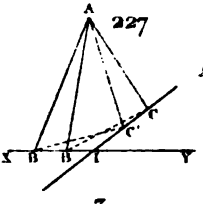
225



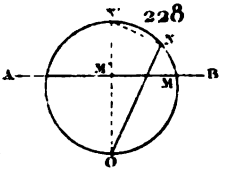
226



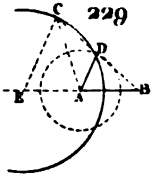
227



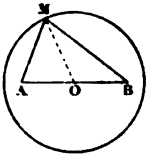
228



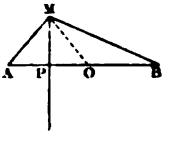
229



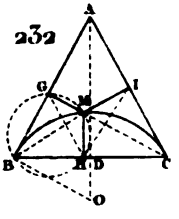
230



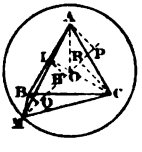
231



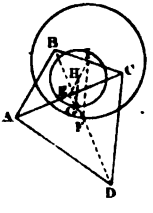
232



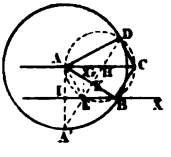
233



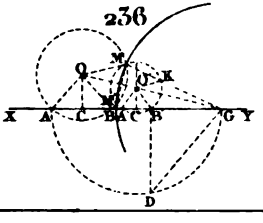
234



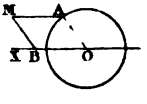
235



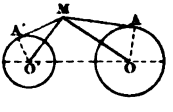
236

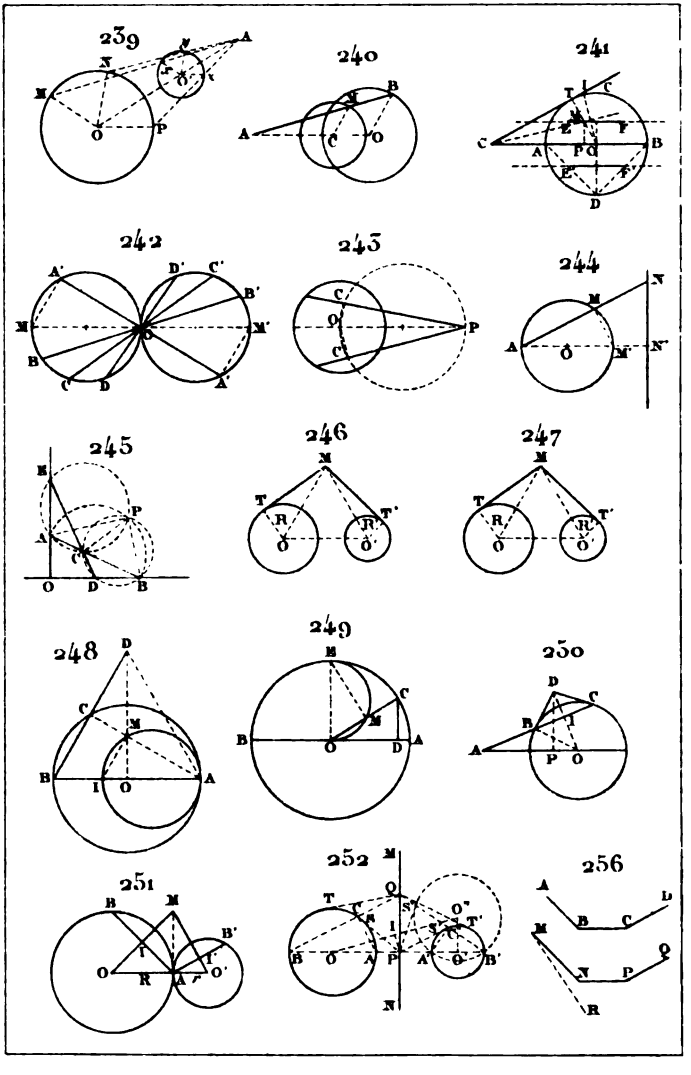


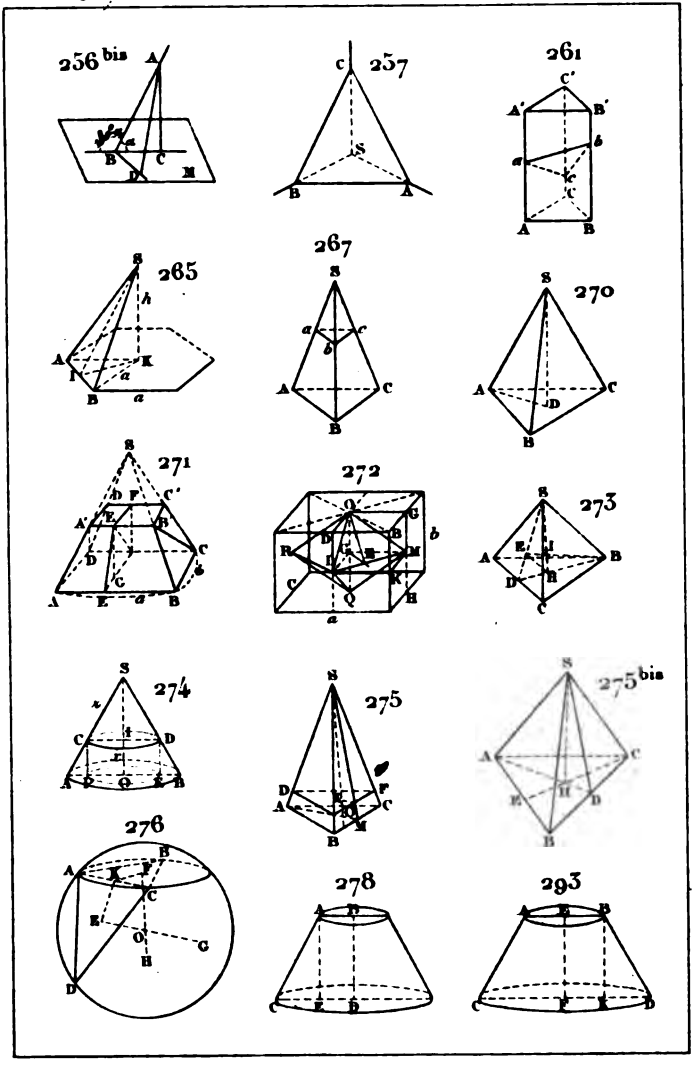
237



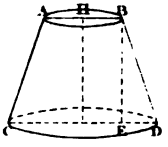
238



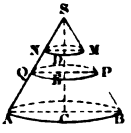

239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
256


256 bis
257
261
265
267
270
271
272
273
274
275
275 bis
276
278
293

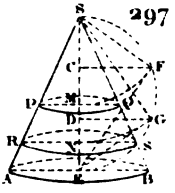
295



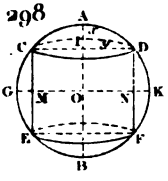
296



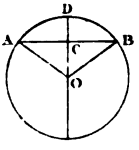
297



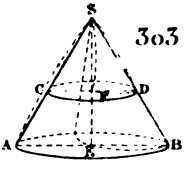
298



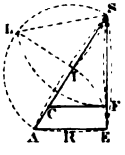
301



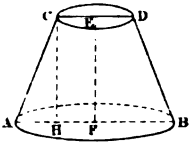
303



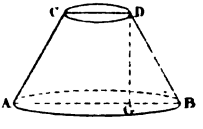
303 bis



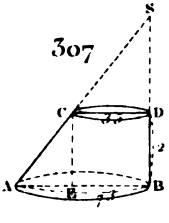
304



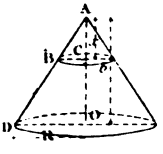
305



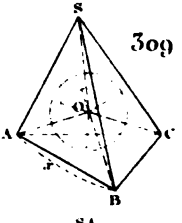
307



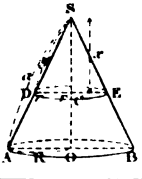
308



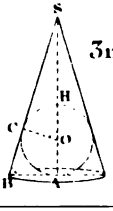
309



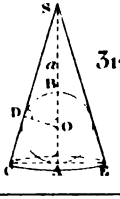
310

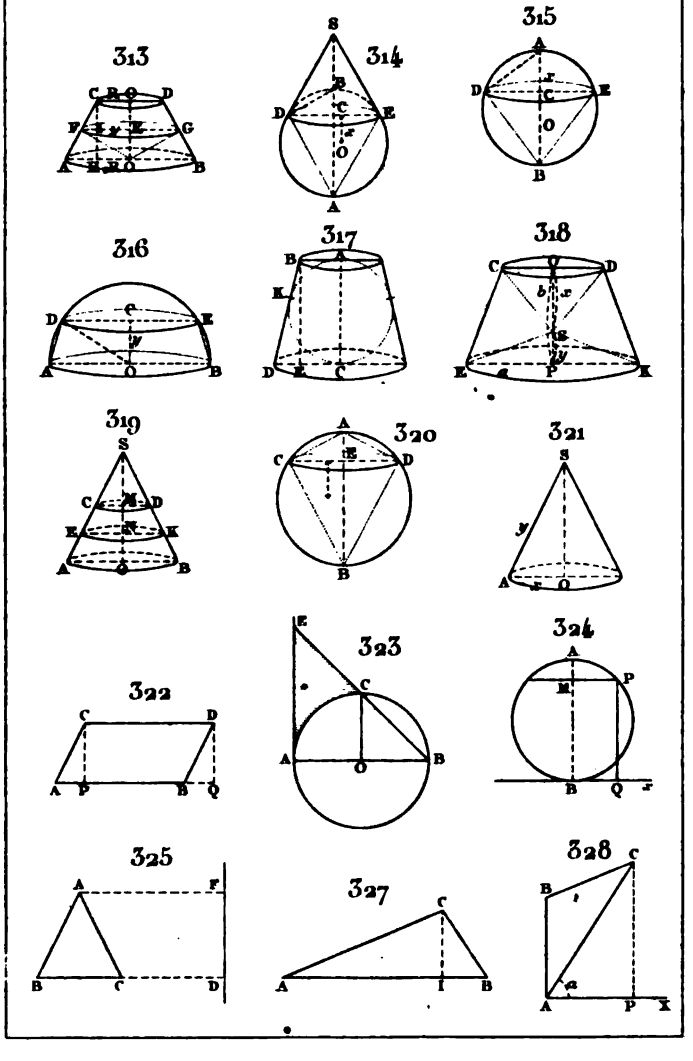


311

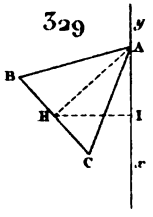


312

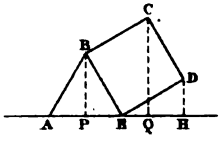



313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
327
328

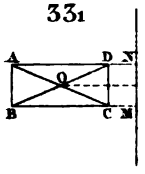
329



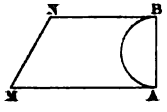
330



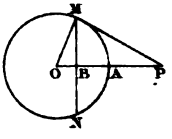
331



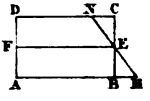
332



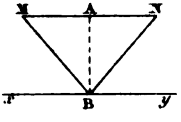
333



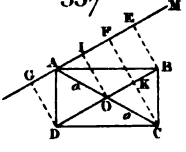
334



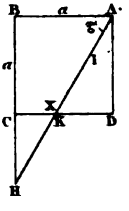
336



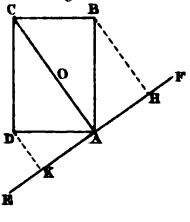
337



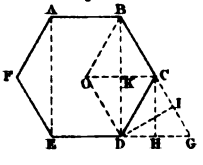
338



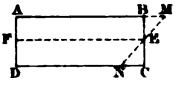
339



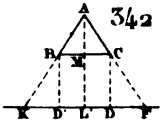
340



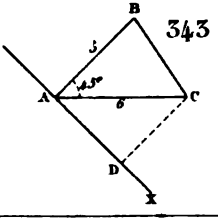
341



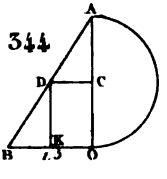
342

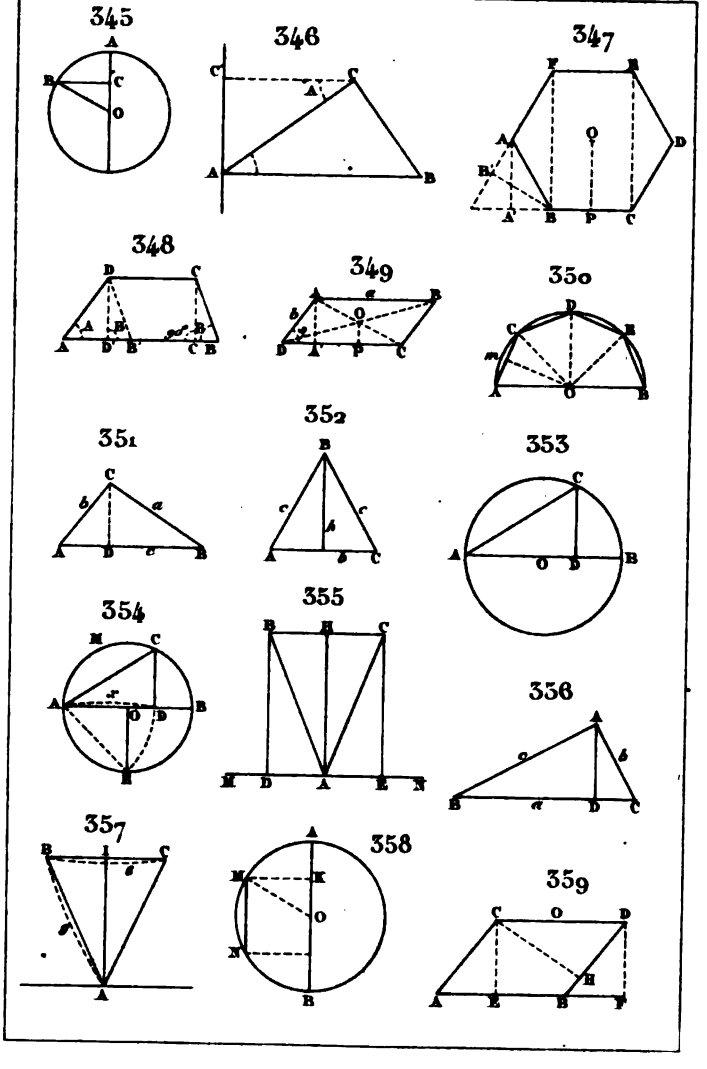


343

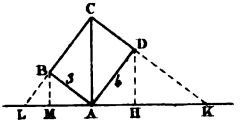


344

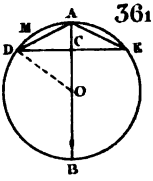



345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359

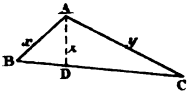
360



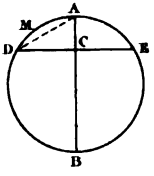
361



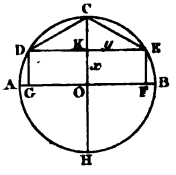
362



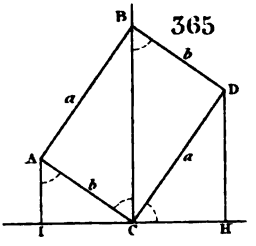
363



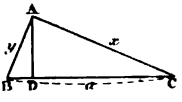
364



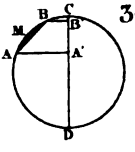
365



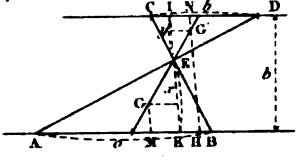
366



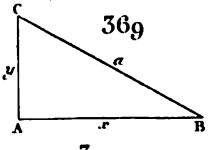
367



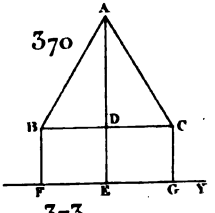
368



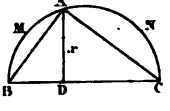
369



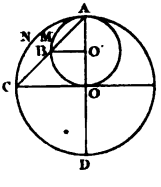
370



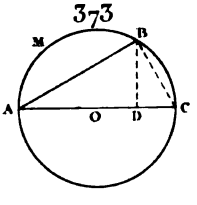
371



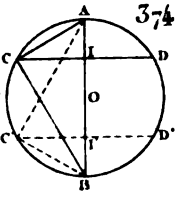
372



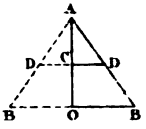
373



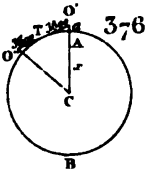
374



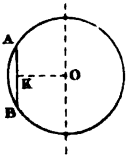
375



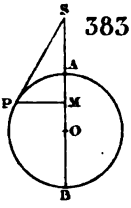
376



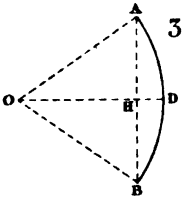
382



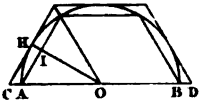
383



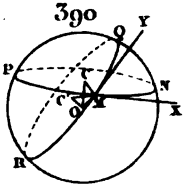
384



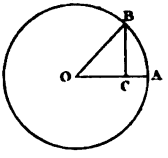
388



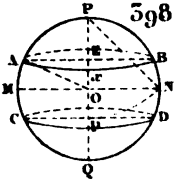
390



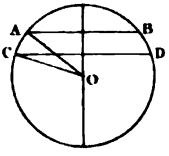
392



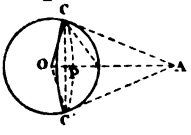
398



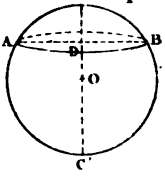
400



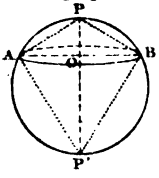
401



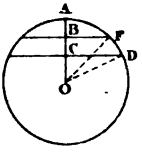
402



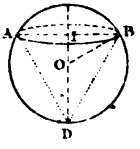
404



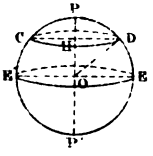
405



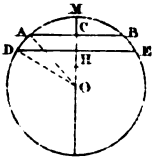
406



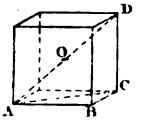
407



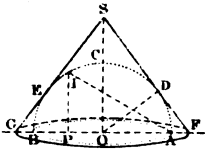
408



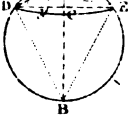
409



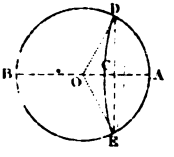
410



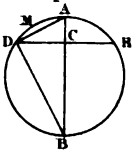
411



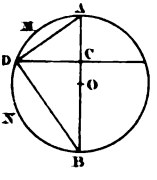
412



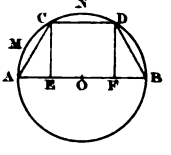
413



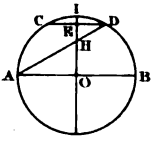
414



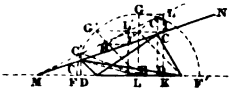
415



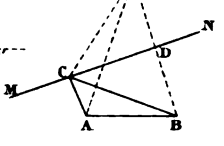
416



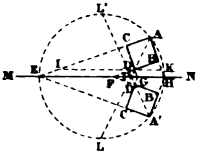
56 bis



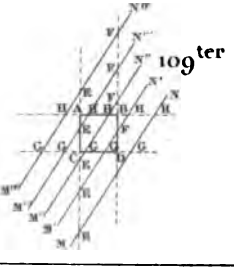
56 ter



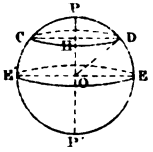
109 bis



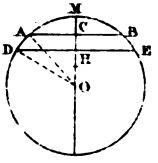
109 ter



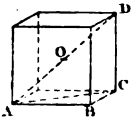
407



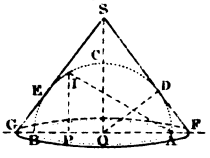
408



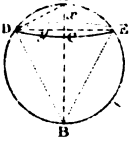
409



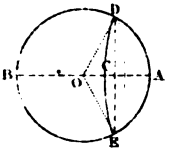
410



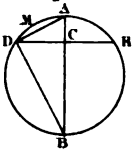
411



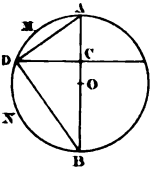
412



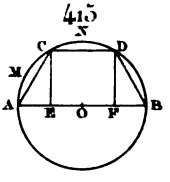
413



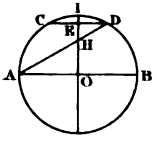
414



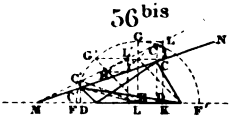
415



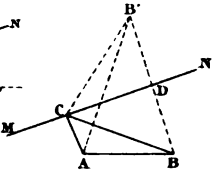
416



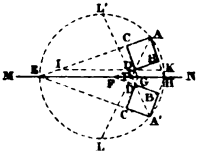
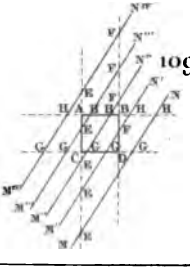
56bis



56ter



109bis



109ter